LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

RÉSONANCE FERROMAGNÉTIQUE DANS LES FILMS DE PERMALLOY

Par A. VAN ITTERBEEK, G. FORREZ, J. SMITS et J. WITTERS,
Instituut voor Lage Temperaturen en Technische Fysica, Leuven (Belgie).

Résumé. — On sait que les raies de résonance ferromagnétique dans les couches de permalloy déposées par évaporation sont plutôt fines, comparées à celles d'autres métaux ferromagnétiques. Nous avons réalisé un montage pour observer la résonance ferromagnétique dans les couches minces, en fonction de leur épaisseur. Nous n'avons pas trouvé d'influence de l'épaisseur de la couche, mais nous avons observé, pour certaines couches, une raie de résonance possédant deux maxima : nous pensons qu'il s'agit là d'un effet d'hétérogénéités ou de tensions existant dans la couche, et qui peuvent dépendre des conditions d'évaporation.

Abstract. — It is known that the ferromagnetic resonance lines in evaporated permalloy films are narrow compared with other ferromagnetic metals.
We developed an apparatus to observe ferromagnetic resonance in thin films as a function of the thickness of the film. We did not find a dependence on the thickness of the film, but we observed for certain films a resonance line with two maxima.
We think this to be a consequence of inhomogenities or stresses in the film. These factors mainly depend on the conditions of evaporation.

1. **Introduction.** — On sait [1] que la raie de résonance ferromagnétique dans des films évaporés de permalloy est sensiblement plus étroite que celle des autres métaux ferromagnétiques. Nous avons mis au point un appareillage permettant d'étudier la résonance ferromagnétique dans des couches minces. Nous avons étudié la largeur de la raie en fonction de l'épaisseur des films. Une telle dépendance n'a pas été trouvée, mais nous observions pour certains films une raie de résonance possédant deux maxima. Les couches furent évaporées dans le vide sur des lamelles en verre de pyrex. Le permalloy utilisé fut mis à notre disposition par le Pr J. A. Haringx des Laboratoires Philips à Eindhoven.

2. **L'appareillage.** — La figure 1 représente le schéma du dispositif expérimental. Nous utilisions un oscillateur klystron à une fréquence de 9 335 MHz. Une cavité cylindrique résonnante à cette fréquence contient l'échantillon. L'onde centimétrique, modulée dans la cavité par le signal d'absorption, est détectée par un cristal.

Le signal de basse fréquence ainsi obtenu est appliqué à l'entrée d'un amplificateur de basses fréquences. Enfin un amplificateur sélectif de

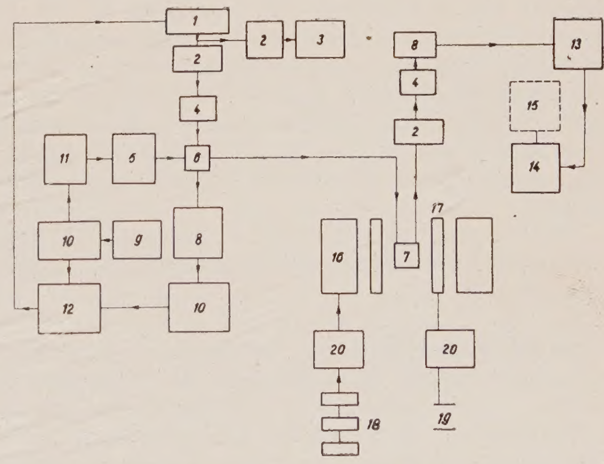


FIG. 1. — Schéma de l'appareillage.
1. Oscillateur klystron. — 2. Isolateurs unidirectionnels. — 3. Cavité pour mesurer la fréquence. — 4. Atténuateurs. — 5. Transformateurs d'impédance. — 6. Pont en forme de T. — 7. Cavité de mesure. — 8. Cristaux détecteurs. — 9. Oscillateur 30 MHz. — 10. Amplificateurs 30 MHz. — 11. Cristal modulateur. — 12. Tube mélangeur. — 13. Amplificateur de basses fréquences. — 14. Amplificateur sélectif 50 Hz. — 15. Détecteur de phase. — 16. Bobines du champ magnétique constant. — 17. Bobines de modulation. — 18. Batteries. — 19. Réseau. — 20. Régulateurs du courant.

Brüel et Kjaer précédant un détecteur de phase nous donne la valeur de la composante correspondant à 50 Hz dans la raie de résonance.

Pour tenir la fréquence de l'oscillateur klystron tout à fait égale à celle de la résonance de la cavité un stabilisateur AC de Pound est introduit dans le circuit.

Le champ magnétique constant (H_c) est livré par un électro-aimant à basse résistance, alimenté par des batteries. La disposition est telle que H_c est perpendiculaire au champ magnétique HF. Le champ alternatif ($h_r \cos \Omega t$) est pris au réseau après filtrage. Les échantillons sont placés parallèlement au champ magnétique constant dans l'axe de la cavité. Ainsi le champ magnétique de haute fréquence est aussi parallèle au plan du film.

3. **La méthode de mesure.** — L'échantillon est soumis à un champ alternatif de 50 Hz superposé au champ constant H_c. Ceci est réalisé au moyen de bobines de modulation placées sur les pièces polaires de l'électro-aimant. Ainsi on parcourt cent fois par seconde une partie du champ magnétique où l'absorption s'effectue. Après la détection nous obtenons un signal qui nous fournit la partie parcourue de la raie. Comme la raie de résonance est, dans le cas présent, large comparée à l'amplitude du champ alternatif qui est à notre disposition il faut mesurer la raie par petits intervalles en donnant au champ H_c quelques valeurs successives. Au lieu d'observer sur l'oscilloscope la raie qui se traduit par la fonction $f(H_0 - H_c)$ où H_0 est le champ correspondant au maximum de la raie et H_c le champ appliqué, on obtient pour chaque valeur du champ H_c une tension proportionnelle à $f(H_0 - H_c + h_r) - f(H_0 - H_c - h_r)$. Comme l'amplitude du champ alternatif (h_r) est petite, cela nous donne la dérivée de la raie de résonance.

Finalement, pour obtenir la forme de la raie elle-même, on intègre graphiquement la courbe mesurée.

4. **Les échantillons.** — Les films de permalloy ont été évaporés dans un appareil d'Edwards à partir d'une nacelle sous forme d'une spirale conique en fil de tungstène. Une plaque de verre sert comme support. Les dimensions de la couche sur laquelle la résonance ferromagnétique est mesurée sont les suivantes : 4×10 mm². L'évaporation est faite dans un vide de 10^{-4} mm ou mieux. Pour les films les plus épais deux ou trois spirales ont été chauffées l'une après l'autre.

L'épaisseur des films est mesurée après l'expérience de résonance par la méthode optique de Tolansky mise au point au laboratoire. Elle varie entre 330 et 2 200 Å ce qui correspond à une quantité de métal de 10 à 70 microgrammes.

5. **Les résultats expérimentaux et discussion.** — Le tableau I fournit les données expérimentales obtenues pour 17 couches.

TABLEAU I

Film n°	Épaisseur (Å)	H_0 (Ø)	Distance entre les points d'inflection (Ø)
—	—	—	—
1	330	1 271	67,6
2	330	1 267	68
3	450	1 215	44
4	450	1 202	40
5	600	1 182	45,5
6	600	1 410	41,6
7	700	1 327	48
8	700	1 133	64
9	720	1 189	53
10	720	1 170	57
11	850	1 192	116
12	850	1 218	108
13	1 300	1 168	61
		1 002	44
14	1 300	1 163	61
		1 002	44
15	1 360	1 041	53
16	1 360	1 037	57
17	2 200	1 180	117
		1 023	52

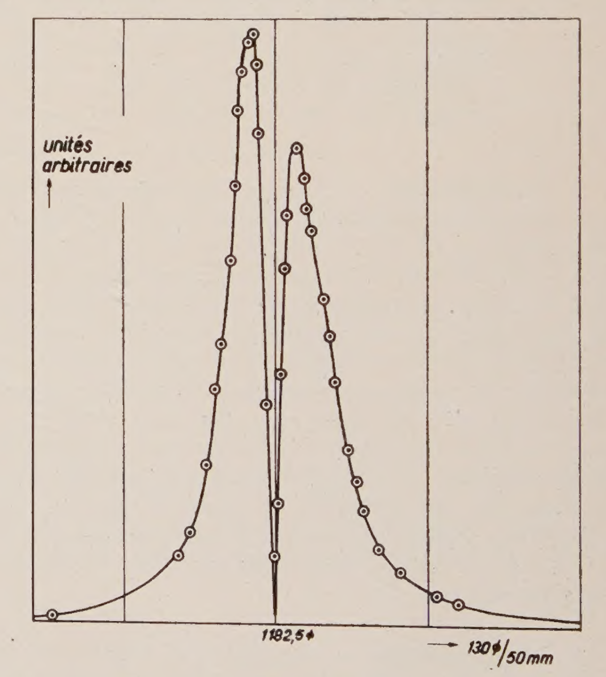


Fig. 2*a*. — Valeur de la dérivée en unités arbitraires mesurée pour le film n° 5.

Comme nous avons dit plus haut le but original de la recherche était d'examiner s'il existe un rapport entre la largeur de la raie et l'épaisseur du film. De même que Seavey et Tannenwald [2] nous n'avons pas pu observer une certaine corrélation entre ces grandeurs, du moins pour les épaisseurs

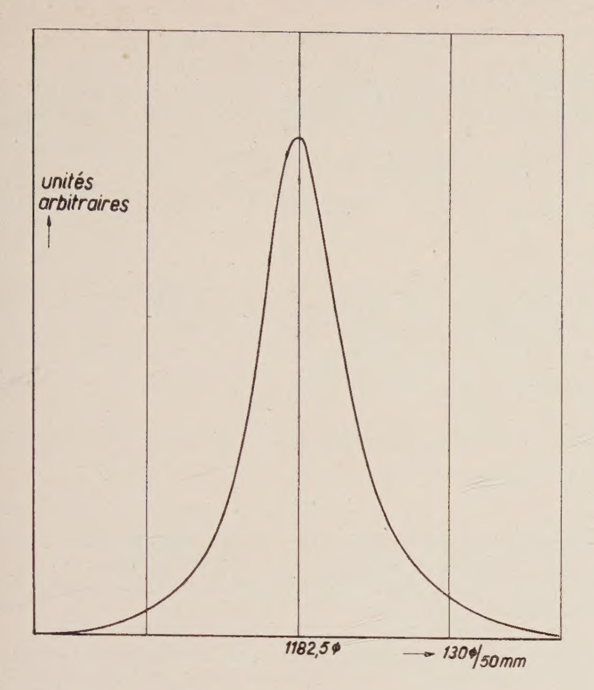


FIG. 2b. — Raie de résonance du film n° 5 en unités arbitraires.



FIG. 3b. — Forme de la raie de résonance pour l'échantillon n° 13.

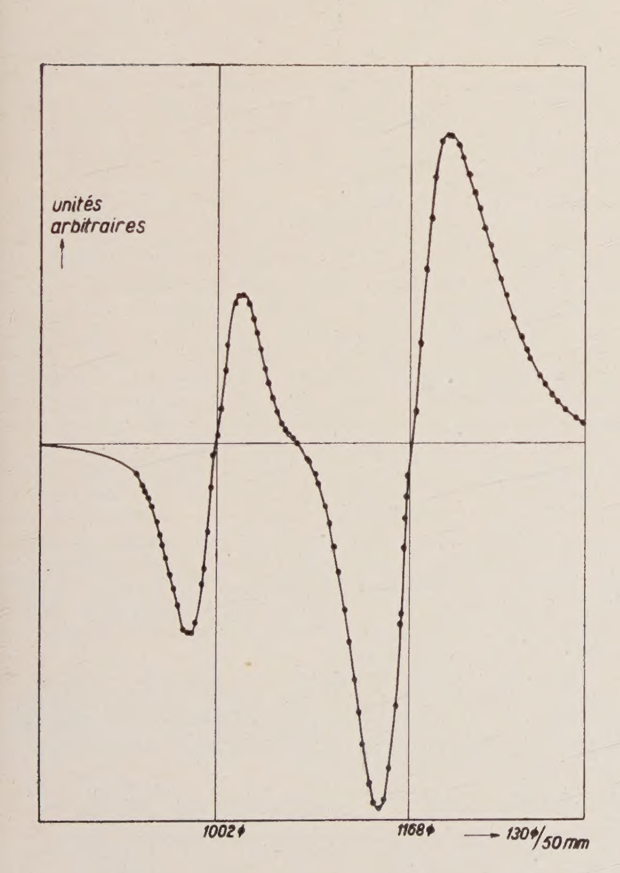


FIG. 3a. — Dérivée de la courbe correspondante à la couche n° 13.

examinées (330 à 2 200 Å). Les différences observées pour les largeurs de la raie doivent être attribuées probablement à d'autres facteurs tels que la présence d'inhomogénéités, l'apparition de tensions, des différences de structure, etc... Ces facteurs qui dépendent surtout des conditions de l'évaporation ne pouvaient pas être détectés jusqu'à présent.

Finalement nous avons pu observer pour certaines courbes un phénomène particulier, l'apparition de deux maxima dans la courbe de résonance. Ceci fut le cas pour les couches n°s 13, 14 et 17. Dans la figure 3*a*, *b* sont indiquées à titre d'exemple les courbes obtenues pour la couche n° 13.

Nous pouvons remarquer que ce phénomène se présente en général pour les films épais, qui furent obtenus par évaporation à partir de trois spirales de tungstène contenant une petite quantité de permalloy ($\pm$ 200 mg). Ce phénomène peut être expliqué de différentes façons parmi lesquelles on peut signaler l'apparition de tensions internes, d'inhomogénéités. En effet nous ne possédons aucune donnée concernant la composition du métal évaporé. D. O. Smith du Laboratoire Lincoln de Mass. Inst. Techn. nous a communiqué dans une lettre privée que lui avait observé une variation de

la concentration du nickel de 0,3 % par 100 °C à partir de 1 550 °C. Également Williams et Sherwood [3] ont observé une variation de la composition du métal par suite de l'évaporation.

A la fin de cet article nous tenons à remercier l'Union Minière du Haut-Katanga pour son aide financière au cours de cette recherche.

Nous exprimons également notre gratitude envers le Centre Inter-Universitaire de Recherches Nucléaires qui a également subventionné ces recherches.

Manuscrit reçu le 11 septembre 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Tannenwald (P. E.) et Seavey (M. H., Jr.), *Phys. Rev.*, 1957, **105**, n° 2, 377-378.

[2] Seavey (M. H., Jr.) et Tannenwald (P. E.), *J. Appl. Physics*, 1959, **29**, n° 3, 292-293.

[3] Williams (H. J.) et Sherwood (R. C.), *J. Appl. Physics*, 1957, **28**, n° 5, 548-555.

REVUE DES LIVRES

Robin (L.), **Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales** (tome III) (1 vol. 16 × 25 cm, VIII + 289 pages, 10 fig., Gauthier-Villars, Paris, 1959, broché 55 NF, cartonné 60 NF.)

Il s'agit du dernier tome d'un traité dont les deux autres parties ont paru respectivement en novembre 1957 et en novembre 1958 (cf. *J. Physique Rad.*, 1957, **19**, 749 et 1959, **20**, 461).

Il contient les quatre chapitres suivants : Chapitre VII : Formules et théorèmes d'addition pour les fonctions de Legendre. Chapitre VIII : Les zéros ou racines des fonctions $P_n^m(u)$ et $Q_n^m(u)$. Chapitre IX : Applications des fonctions de Legendre aux surfaces de révolution, avec des systèmes de coordonnées curvilignes orthogonales autres que les coordonnées sphériques. Chapitre X : Fonctions qui se rattachent étroitement à celles de Legendre : polynômes et fonctions de Gegenbauer ou ultrasphériques ; fonctions sphéroïdales. En annexes, on trouve un bref exposé sur les fonctions de Bessel sphériques, une liste détaillée des tables numériques consacrées aux fonctions de Legendre ou à des fonctions qui leur sont apparentées et enfin un index alphabétique.

Du point de vue des applications à la physique mathématique, c'est sans doute le tome le plus riche du traité, car on y trouve, aux chapitres IX et X, les solutions de toute une série de problèmes de Dirichlet relatifs aux équations de Lagrange ou de Helmholtz, pour des surfaces telles que les ellipsoïdes de révolution, le tore à section circulaire, le demi-cône circulaire, la lentille et la calotte sphériques, le fuseau (tore coupant son axe) et le système de deux sphères non sécantes. A quiconque doit se servir des fonctions de Legendre, des fonctions sphéroïdales ou d'autres fonctions apparentées, ce traité épargnera bien des recherches et bien des tâtonnements ingrats.

M. Jessel.

Robin (L.), **Tables numériques des fonctions associées de Legendre.** (1 vol. 30 × 21 cm, 640 p., *Revue d'Optique*, Paris, 1959.)

Ce deuxième fascicule, suite de celui publié en 1952, est relatif aux intervalles :

$n = -0{,}5\ (0{,}1)10$; $m = 0(1)2$; $\theta = 0°(1°)180°$.

Les valeurs ont été calculées, pour le C. N. E. T., sous le contrôle du Laboratoire de Calcul de l'Université de Grenoble.

M. Jessel.

Le problème à N corps. (The many body problem.) École de physique théorique, Les Houches, 1958. (1 vol. de 675 p., relié, 21 × 27 cm, Dunod, Paris, 1958, prix : 69 NF.)

Recueil de cours, tous en langue anglaise (sauf le 5e). *Théorie des perturbations des systèmes de nombreux fermions*, par N. M. Hugenholtz ; *Théorie de la structure nucléaire*, par K. A. Brueckner (Éléments de la théorie de la diffusion, théorie des perturbations des systèmes à nombreuses particules, structure nucléaire, méthode des matrices de réaction) ; *Autres applications de la théorie des systèmes de nombreux corps*, par K. A. Brueckner (propriété de ^{3}He à basse température, gaz d'électrons, système de Bose) ; *Récents progrès dans la théorie de la matière nucléaire*, par D. J. Thouless ; *Sur la détermination de la grande fonction de partition et son application à la contribution des collisions binaires pour un gaz de fermions en interaction*, par C. Bloch et C. de Dominicis ; *Structure nucléaire*, par B. R. Mottelson (Structures en couche, couplages nucléaires, spectres des noyaux déformés) ; *Propriétés de la matière nucléaire*, par V. Weisskopf ; *Propriétés statistiques des noyaux*, par V. Stroutinski ; *Propriétés des mouvements collectifs dans un système de particules*, par H. J. Lipkin ; *Degrés de liberté collectifs et fictifs dans les modèles nucléaires*, par H. J. Lipkin ; *Introduction à la méthode de transformation canonique de Bogoliubof*, par S. T. Beliaev (fermions et bosons, superfluidité) ; *Application de la méthode de transformation canonique aux noyaux*, par S. T. Beliaev (Spectres d'énergie, formes d'équilibre, excitation collective) ; *Théorie générale des coordonnées collectives*, par D. Bohm (Plasma comme champ continu, méthode des particules individuelles, méthode des conditions subsidiaires, traitement quantique de la méthode de transformation canonique) ; *Électrons, plasmons et phonons*, par D. Pines ; *Théorie de la Supraconductivité*, par J. R. Schrieffer ; *Supraconductivité expérimentale*, par B. A. Lynton ; *Hélium II liquide*, par B. A. Lynton ; *Gaz de Bose de sphères dures. Méthode des pseudo-potentiels*, par K. Huang ; *Méthode d'expansion des collisions binaires de Lee et Yang*, par K. Huang.

Recueil d'articles sur les sujets les plus intéressants, traités par des chercheurs éminents. Cependant, l'édition séparée de ces divers articles permettrait à un public plus large d'acheter selon le choix de chacun. Leur reliure en bloc est bien incommode.

J. Winter.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM TOME 21, FÉVRIER 1960, PAGE 85.

FONCTIONS DE BASE DE SYMÉTRIE DÉFINIE POUR LES FONCTIONS D'ONDE D'UN SYSTÈME DE TROIS PARTICULES IDENTIQUES

Par Gilbert MUNSCHY, Philippe PLUVINAGE et Joseph PRORIOL,
Institut de Physique de la Faculté des Sciences de Strasbourg.

Résumé. — Pour la résolution d'un problème quantique relatif à un système de trois particules identiques, on doit pouvoir disposer de fonctions de base à caractère de symétrie bien défini pour l'échange des particules. De telles fonctions de base polynômiales, appartenant aux trois types de symétrie possibles, peuvent être obtenues en utilisant la représentation irréductible du groupe des permutations de trois objets dans le plan complexe. On leur impose la condition supplémentaire d'orthogonalité dans le triangle de définition des variables en les assujettissant à satisfaire à deux équations aux valeurs propres auto-adjointes et entièrement symétriques pour l'échange des particules. L'une est l'équation du second ordre d'Appell et Kampé de Fériet. Les premiers polynômes sont donnés sous forme trigonométrique, jusqu'au degré cinq inclus.

Abstract. — As a first step in the precise study of the quantum radial problem for a system of three identical particles, we give a method of building orthogonal sets of eigenfunctions with definite character of symmetry. Rather than the three linear distances of the particles, three variables more closely related to a representation of the symmetric group S_3 are chosen. The first is not affected by permutations. The two others are transformed in a simple way, and it is possible to form with them polynomials of definite symmetry. These polynomials are determined as eigenfunctions of two commutable operators. Explicit expressions are given up to the fifth degree, what seems quite sufficient for practical purposes.

1. **Position du problème.** — En général, la résolution pratique d'un problème quantique relatif à un système de particules se fait en cherchant d'abord des solutions, rigoureuses ou approchées, de l'équation de Schrödinger, puis en les combinant de façon à satisfaire aux conditions de symétrie. Cet ordre des calculs est sans inconvénient dans la phase préliminaire d'une recherche où l'on se contente de solutions approchées très simples. Mais il n'en est plus de même quand on veut former des fonctions d'onde plus raffinées en superposant un grand nombre de fonctions de base. Si les conditions de symétrie sont réalisées d'emblée sur ces dernières, le nombre des coefficients inconnus est réduit au minimum. Un exemple simple est la résolution de l'équation de Schrödinger de l'atome d'hélium quand les fonctions de base sont déjà soit symétriques soit antisymétriques pour l'échange des deux électrons. Nous nous proposons d'étudier la formation de fonctions de base de symétrie donnée dans le cas d'un système de trois particules identiques. L'exposé de principe peut se faire sur les états S où la fonction d'onde dépend seulement de trois variables qui sont initialement les côtés r_1, r_2, r_3 du triangle des particules. Il s'agit de trouver un système complet de fonctions, de préférence orthogonales, subissant des transformations données quand on permute les particules.

2. **Choix des variables.** — Nous choisissons comme éléments du groupe symétrique S_3 :

$$I,\ P_{23},\ P_{31},\ P_{12},\ P_{231},\ P_{213} \tag{1}$$

I est l'identité, P_{ij} échange les particules i et j, P_{ijk} est le produit $P_{ij}\,P_{ki}$.

On peut définir un espace vectoriel à deux dimensions (x, y) tel que les permutations soient représentées par des rotations ou des symétries dont les matrices sont :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{231} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$P_{213} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_{31} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$P_{12} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Cette représentation est irréductible et fidèle.

Nous nous servirons aussi d'une représentation équivalente dans le plan complexe définie par :

$$z = x + iy,$$

$$Iz = z, \quad P_{231}\,z = e^{-\frac{2\pi i}{3}}\,z, \quad P_{213}\,z = e^{\frac{2\pi i}{3}}\,z, \tag{4}$$

$$P_{23}\,z = \bar{z}, \quad P_{31}\,z = e^{-\frac{2\pi i}{3}}\,\bar{z}, \quad P_{12}\,z = e^{+\frac{2\pi i}{3}}\,\bar{z}. \tag{5}$$

Aux variables initiales r_1, r_2, r_3 il est avantageux de substituer des variables dont la première est invariante pour toutes les permutations de S_3 et

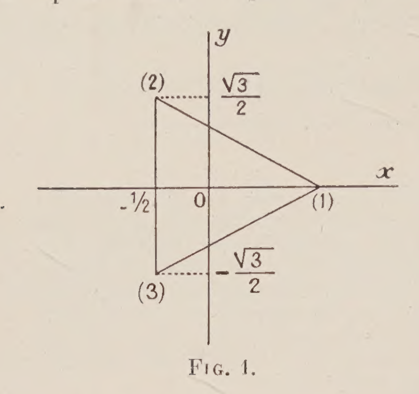


FIG. 1.

dont les deux autres sont identifiables aux coordonnées x et y. La définition la plus simple est :

$$\left\{\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{3}(1-x)\,s, \\ r_2 &= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)s, \\ r_3 &= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)s. \end{aligned}\right. \tag{6a}$$

$$\left\{\begin{aligned} s &= r_1+r_2+r_3, \\ x &= \frac{r_2+r_3-2r_1}{r_1+r_2+r_3}, \\ y &= \sqrt{3}\,\frac{r_3-r_2}{r_1+r_2+r_3}. \end{aligned}\right. \tag{6b}$$

Si le potentiel n'est pas à noyau dur, le domaine de variation de s est $(0, \infty)$ et celui de x et y est le triangle équilatéral $\mathcal{C}$ de sommets $(1, 0)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ dans le plan xOy. Si le potentiel est à noyau dur de rayon a, le domaine de variation de s est $(6a, \infty)$ et, du triangle $\mathcal{C}$, on ne doit conserver que le domaine $H(s)$ en forme d'hexagone irrégulier :

$$x \leqslant 1-\frac{6a}{s}, \qquad -\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y \leqslant 1-\frac{6a}{s};$$

$$-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y \leqslant 1-\frac{6a}{s}.$$

Mais ce cas présente de grandes difficultés mathématiques et ne sera pas étudié ici.

3. **Polynômes en x et y de symétrie donnée.** —

La recherche de polynômes en x et y de symétrie donnée est d'un grand intérêt pour la détermination de fonctions de x et de y développables en série entière. Si l'on cherche ces fonctions sous la forme d'une série double de monômes $x^p y^q$ dont les coefficients sont indéterminés, le nombre des inconnues est trop élevé. Il est avantageux de substituer aux monômes, des polynômes à symétrie définie. Soit F un tel polynôme. On peut envisager les symétries suivantes :

Symétrie totale. — F est invariant pour toute permutation.

Antisymétrie. — F est changé en $-F$ par les permutation P_{ij} et reste invariant pour les permutations I et P_{ijk}.

Symétrie intermédiaire. — Deux polynômes $\dot{F}$ et $\ddot{F}$ qui seront dits de première et de deuxième espèces sont associés de façon que, sous l'action des matrices (3), ils se transforment comme x et y. Ainsi :

$$\left\{\begin{aligned} P_{23}\dot{F} &= \dot{F}, & P_{23}\ddot{F} &= -\ddot{F}, \\ P_{31}\dot{F} &= -\frac{1}{2}\dot{F}-\frac{\sqrt{3}}{2}\ddot{F}, & P_{31}\ddot{F} &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{F}+\frac{1}{2}\ddot{F}, \\ P_{12}\dot{F} &= -\frac{1}{2}\dot{F}+\frac{\sqrt{3}}{2}\ddot{F}, & P_{12}\ddot{F} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{F}+\frac{1}{2}\ddot{F} \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Nous remarquons que les opérateurs (2), (3) ne changent pas le degré. Un polynôme homogène de degré m reste homogène et de degré m. Tout polynôme F peut être considéré comme une somme de polynômes homogènes Q_m. Il suffit donc d'assurer une symétrie donnée aux Q_m.

Utilisant la représentation complexe nous pouvons écrire :

$$Q_m = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{m} a_{mp}\, z^p(\bar{z})^{m-p}, \tag{8}$$

avec la condition de réalité :

$$a_{mp} = a_{m,m-p} \tag{9}$$

Le coefficient 1/2 est destiné à simplifier l'écriture des expressions finales.

Il faut exprimer que, pour les transformations (5), le polynôme Q_m subit les changements caractéristiques des différentes symétries.

Symétrie totale. — Le polynôme sera désigné par $Q_m^{(s)}$.

$$Q_m^{(s)} \equiv P_{23}\,Q_m^{(s)} \equiv P_{31}\,Q_m^{(s)} \equiv P_{12}\,Q_m^{(s)}.$$

Il suffit d'imposer :

$$\sum_p a_{mp}\, z^p(\bar{z})^{m-p} \equiv \sum_p a_{mp}(\bar{z})^p\, z^{m-p}$$

$$\equiv \sum_p a_{mp}(\bar{z})^p\, z^{m-p}\, e^{(m-2p)\frac{2\pi i}{3}};$$

Il en résulte :

$$a_{mp} = a_{m,m-p}.$$

$$e^{(m-2p)\frac{2\pi i}{3}} = 1.$$

D'après (9) les coefficients a_{mp} sont réels. En outre, l'entier p doit être de la forme :
$\frac{1}{2}(m - 3q)$, q entier positif ou nul inférieur à la partie entière de $m/3$.

$$0 \leqslant q \leqslant E(m/3).$$

Deux cas sont à distinguer suivant que m est pair ou impair.

$m = 2k$. — q doit être pair et p est de la forme $k - 3n$. En modifiant la signification du second indice, on obtient l'expression générale :

$$Q_{2k}^{(s)} = \sum_{n=0}^{n'} \frac{1}{2} a_{2k,n}^{(s)} (z\bar{z})^{k-3n} (z^{6n} + (\bar{z})^{6n}), \qquad n' = E(k/3).$$

$m = 2k + 1$. — q doit être impair et p est de la forme $k - 3n - 1$.

$$Q_{2k+1}^{(s)} = \sum_{n=0}^{n'} \frac{1}{2} a_{2k+1,n}^{(s)} (z\bar{z})^{k-3n-1} (z^{6n+3} + (\bar{z})^{6n+3}),$$

$$n' = E\left(\frac{k-1}{3}\right).$$

On obtient des formes équivalentes en utilisant des coordonnées polaires dans le plan xOy :

$$z = r\,e^{i\varphi}, \qquad \bar{z} = r\,e^{-i\varphi}.$$

$$Q_{2k}^{(s)} = r^{2k} \sum_{n=0}^{n'} a_{2k,n}^{(s)} \cos 6n\,\varphi, \qquad n' = E(k/3). \tag{10a}$$

$$Q_{2k+1}^{(s)} = r^{2k+1} \sum_{n=0}^{n'} a_{2k+1,n}^{(s)} \cos (6n + 3)\,\varphi, \tag{10b}$$

$$n' = E\left(\frac{k-1}{3}\right).$$

La vérification de l'invariance est immédiate sur ces expressions.

La détermination de la forme générale des polynômes possédant les autres types de symétrie s'effectue de façon analogue, et nous ne donnons que les résultats en coordonnées polaires.

Antisymétrie.

$$Q_{2k}^{(a)} = r^{2k} \sum_{n=1}^{n'} a_{2k,n}^{(a)} \sin 6n\,\varphi, \qquad n' = E(k/3). \tag{11a}$$

$$Q_{2k+1}^{(a)} = r^{2k+1} \sum_{n=0}^{n'} a_{2k+1,n}^{(a)} \sin (6n + 3)\,\varphi, \tag{11b}$$

$$n' = E\left(\frac{k-1}{3}\right).$$

Symétrie intermédiaire de première et de deuxième espèces.

$$\left\{\begin{aligned} \dot{Q}_{2k} &= r^{2k} \left[\sum_{n=0}^{n'} \dot{a}_{2k,n}^{(1)} \cos (6n + 2)\,\varphi + \sum_{n=0}^{n''} \dot{a}_{2k,n}^{(2)} \cos (6n + 4)\,\varphi \right] \\ \ddot{Q}_{2k} &= r^{2k} \left[\sum_{n=0}^{n'} \ddot{a}_{2k,n}^{(1)} \sin (6n + 2)\,\varphi + \sum_{n=0}^{n''} \ddot{a}_{2k,n}^{(2)} \sin (6n + 4)\,\varphi \right], \end{aligned}\right. \tag{12a}$$

$$n' = E\left(\frac{k-1}{3}\right), \qquad n'' = E\left(\frac{k-2}{3}\right),$$

$$\left\{\begin{aligned} \dot{Q}_{2k+1} &= r^{2k+1} \left[\sum_{n=0}^{n'} \dot{a}_{2k+1,n}^{(1)} \cos (6n + 1)\,\varphi + \sum_{n=0}^{n''} \dot{a}_{2k+1,n}^{(2)} \cos (6n + 5)\,\varphi \right], \\ \ddot{Q}_{2k+1} &= r^{2k+1} \left[\sum_{n=0}^{n'} \ddot{a}_{2k+1,n}^{(1)} \sin (6n + 1)\,\varphi + \sum_{n=0}^{n''} \ddot{a}_{2k+1,n}^{(2)} \sin (6n + 5)\,\varphi \right], \end{aligned}\right. \tag{12b}$$

$$n' = E(k/3), \qquad n'' = E(k - 2)/3.$$

On peut alors dresser un tableau donnant le nombre des polynômes homogènes indépendants, de degré m, et de symétrie spécifiée.

Degré	Symétrie	Antisymétrie	Symétrie intermédiaire
0	1	0	0
1	0	0	2
2	1	0	2
3	1	1	2
4	1	0	4
5	1	1	4
6	2	1	4
7	1	1	6
8	2	1	6
......	......	......	......

On déduit de ce tableau qu'un polynôme arbitraire de degré 8 par exemple est une combinaison linéaire de 10 polynômes symétriques, de 5 polynômes antisymétriques, et de 30 polynômes de symétrie intermédiaire se séparant en 15 de première espèce et 15 de seconde. Ces nombres 10, 5, 30 sont obtenus en ajoutant les chiffres de chaque colonne. Au lieu des 45 monômes arbitraires en $x^p\,y^q$, notre classement donne 45 expressions des types (10) à (12), qu'il est facile de convertir en polynômes homogènes en x et y. Si la symétrie du polynôme cherché est spécifiée, le nombre des inconnues est réduit, suivant les cas, à 10, 5 ou 30.

4. **Formation d'une famille de polynômes orthogonaux.** — De même qu'il est souvent commode de se servir de polynômes orthogonaux en x plutôt que des puissances de x, de même des familles orthogonales de polynômes en x et y sont préférables aux termes (10) à (12). Nous les définirons comme fonctions propres simultanées de deux opérateurs commutables auto-adjoints dans $\mathcal{T}$. La fonction de poids est prise égale à l'unité. Il n'y aurait d'ailleurs pas de difficultés de principe à prendre une fonction de poids plus générale, mais l'intérêt d'un tel choix n'est pas prouvé. $K^{(n)}$ désignera un des opérateurs ; n est son ordre. Nous verrons qu'on peut adopter les valeurs 2 et 4.

$K^{(n)}$ doit être totalement symétrique par rapport aux variables. Sinon, une solution F de l'équation aux valeurs propres :

$$K^{(n)} F = \lambda F,$$

ne pourrait pas avoir une symétrie définie.

Nous allons montrer dans ce qui suit, que l'opérateur $K^{(2)}$ coïncide, à une transformation linéaire près, avec l'opérateur d'Appell et Kampé de Fériet [1] tandis que la définition de $K^{(4)}$ est nouvelle.

5. **Propriétés de l'opérateur d'Appell et Kampé de Fériet.** — Donnons une définition adaptée à la présente étude. Soit $A_1 A_2 A_3$ les sommets du triangle $\mathcal{T}$ (figure). Nous nous servirons des équations des côtés :

$$D_{23} \equiv x + \frac{1}{2} = 0,$$

$$D_{31} \equiv -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2} = 0, \qquad (13)$$

$$D_{12} \equiv -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2} = 0,$$

et nous utiliserons aussi les gradients dans les directions $A_2 A_3$, $A_3 A_1$ et $A_1 A_2$:

$$\frac{\partial}{\partial n_{23}} = -\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial n_{31}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}, \qquad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_{12}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Pour trouver des opérateurs auto-adjoints, il est commode de passer par la forme quadratique associée et celle-ci doit respecter les conditions suivantes : elle doit être totalement symétrique. Dans la variation du premier ordre de son intégrale sur $\mathcal{T}$, les termes intégrés, pris sur le contour, doivent être nuls. Le degré en x et y doit être égal à l'ordre de dérivation maximum, pour que les fonctions propres puissent être des polynômes. Seuls des degrés pairs sont à considérer et le cas le plus simple est le deuxième ordre pour K, donc le deuxième degré pour la forme associée dont l'expression est presque évidente :

$$Q_2[F] \equiv \frac{2}{3}\left[D_{12} D_{31}\left(\frac{\partial F}{\partial n_{23}}\right)^2 + D_{23} D_{12}\left(\frac{\partial F}{\partial n_{31}}\right)^2 + D_{31} D_{23}\left(\frac{\partial F}{\partial n_{12}}\right)^2\right]. \qquad (15)$$

Le coefficient 2/3 est nécessaire pour retrouver l'opérateur d'Appell et Kampé de Fériet. On voit facilement que $Q[F]$ remplit les conditions voulues. En particulier, le problème de variation qui mène à la définition de $K^{(2)}$ s'énonce ainsi :

$$J = \iint_{\mathcal{T}} Q_2[F]\, dx\, dy, \qquad (16)$$

$$\delta J = 0 \text{ sous la condition } \iint_{\mathcal{T}} F^2\, dx\, dy = N.$$

L'expression de $K^{(2)}$ est :

$$K^{(2)} \equiv \frac{4}{3}\left[\frac{\partial}{\partial n_{23}} D_{12} D_{31} \frac{\partial}{\partial n_{23}} + \frac{\partial}{\partial n_{31}} D_{23} D_{12} \frac{\partial}{\partial n_{31}} + \frac{\partial}{\partial n_{12}} D_{31} D_{23} \frac{\partial}{\partial n_{12}}\right]. \qquad (17)$$

Si l'on effectue la transformation linéaire :

$$x = \frac{3}{2}\xi - \frac{1}{2}, \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{2}\xi + \sqrt{3}\eta - \frac{\sqrt{3}}{2},$$

le triangle équilatéral $\mathcal{T}$ devient le triangle rectangle isocèle dont les sommets sont l'origine et les points de coordonnées (1,0) et (0,1). L'opérateur $K^{(2)}$ se change en :

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\xi(1-\xi)\frac{\partial}{\partial \xi} - \xi\eta\frac{\partial}{\partial \eta}\right] + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[-\xi\eta\frac{\partial}{\partial \xi} + \eta(1-\eta)\frac{\partial}{\partial \eta}\right].$$

C'est l'expression habituelle de l'opérateur d'Appell et Kampé de Fériet. $K^{(2)}$ est égal à ce même opérateur, mais exprimé autrement. On peut donc profiter des résultats des recherches antérieures. En particulier $K^{(2)}$ a pour valeurs propres des nombres de la forme :

$$\lambda = -m(m+2), \qquad m \text{ entier} \geqslant 0. \qquad (18)$$

Les fonctions propres appartenant à la valeur propre λ sont des polynômes de degré m ; la valeur propre est dégénérée d'ordre $m + 1$.

On peut considérer $K^{(2)}$ comme la somme de trois opérateurs non indépendants :

$$K^{(2)} = G_1 + G_2 + G_3, \qquad (19)$$

$$G_1 = \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial n_{23}} D_{12} D_{31} \frac{\partial}{\partial n_{23}}. \qquad (20)$$

G_2 et G_3 s'obtiennent à partir de G_1 par une permutation cyclique des deux indices.

G_1 ne change pas quand on échange les indices 2 et 3. En outre, chaque opérateur commute avec $K^{(2)}$, comme on peut le vérifier directement. Si l'on cherche seulement la symétrie ou l'anti-

symétrie par rapport à l'échange de deux particules, comme dans le cas de l'hélium, on fait jouer à G_1 par exemple le rôle de second opérateur associé à $K^{(2)}$ [2]. Les polynômes F sont déterminés comme fonctions propres simultanées de G_1 et de $K^{(2)}$. Mais les polynômes ainsi obtenus n'ont pas de symétrie définie pour l'échange des trois particules. Donc G_1 ne convient pas et il faut recourir à un opérateur $K^{(4)}$ du quatrième ordre. Pour abréger l'exposé, nous allons montrer, sur l'exemple de $K^{(2)}$, le principe des calculs applicable aussi à $K^{(4)}$.

D'après les expressions (10) à (12) des termes des polynômes à déterminer, on pressent que l'usage de coordonnées polaires est avantageux. Transformons donc les expressions (13) et (14). Il suffit de calculer :

$$D_{23} = r\cos\varphi + \frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial}{\partial n_{23}} = -\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{21}$$

car D_{31} et $\frac{\partial}{\partial n_{31}}$ s'obtiennent en remplaçant φ par $\varphi - \frac{2\pi}{3}$, D_{12} et $\frac{\partial}{\partial n_{12}}$, en remplaçant φ par $\varphi + \frac{2\pi}{3}$. La formation de Q ne nécessite que le calcul de l'expression :

$$\frac{2}{3}D_{12}D_{31}\left(\frac{\partial F}{\partial n_{23}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{24}(1 - r^2 - r\,e^{i\varphi} - r\,e^{-i\varphi} + r^2 e^{2i\varphi} + r^2 e^{-2i\varphi})$$

$$\times\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\varphi} - i\frac{\partial F}{\partial r}\right)e^{i\varphi} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\varphi} + i\frac{\partial F}{\partial r}\right)e^{-i\varphi}\right]^2. \tag{22}$$

Les deux autres termes s'en déduisent en changeant φ en $\varphi \pm \frac{2\pi}{3}$ et il faut ensuite sommer. Mais cette sommation, que nous symbolisons par S, est très simple car :

$$S\,e^{in\varphi} = \begin{cases} 3e^{in\varphi} \text{ si } n \text{ est multiple de 3,} \\ 0 \text{ si } n \text{ n'est pas multiple de 3.} \end{cases} \tag{23}$$

Dans le développement de l'expression (22) nous avons donc à retenir seulement les termes indépendants, en $e^{3i\varphi}$, et en $e^{-3i\varphi}$ et à les multiplier par 3. Nous obtenons ainsi :

$$Q_2[F] = \frac{1}{4}\left\{(1 - 2r^2)\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)^2\right.$$

$$\left. - r\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2\right]\cos 3\varphi - 2\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\sin 3\varphi\right\}. \tag{24}$$

En multipliant par l'élément d'aire $r\,dr\,d\varphi$ et en appliquant la technique du calcul des variations, on passe sans difficultés à l'opérateur $K^{(2)}$:

$$K^{(2)} = \frac{1}{2r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[r(1 - 2r^2 + r\cos 3\varphi)\frac{\partial}{\partial r} - r\sin 3\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[-r\sin 3\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} - \cos 3\varphi\right)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\right\}. \tag{25}$$

Sous cette forme, la recherche des valeurs propres est très simple : un polynôme F, de degré m, comprend comme termes de plus haut degré transformés en expression trigonométrique, $r^m e^{ip\varphi}$. La seule partie de $K^{(2)}$ qui, appliquée à F, conserve le degré est :

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r^3\frac{\partial}{\partial r}.$$

Dans l'équation aux valeurs propres :

$$K^{(2)}F = \lambda F,$$

l'identification terme à terme n'est possible que si :

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r^3\frac{\partial}{\partial r}r^m e^{ip\varphi} = \lambda r^m e^{ip\varphi}.$$

On en déduit la valeur propre déjà citée :

$$\lambda = -m(m + 2).$$

Il n'existe aucune relation entre les coefficients des termes de plus haut degré. Le rôle du second opérateur sera précisément d'en établir. Jusque là ces $m + 1$ coefficients sont indépendants ; la valeur propre λ est bien dégénérée d'ordre $m + 1$.

Montrons plus en détail comment un polynôme F se calcule quand on donne l'ensemble des termes de plus haut degré. Bien entendu, nous prenons F sous la forme trigonométrique. L'action de $K^{(2)}$ sur un terme :

$$r^p e^{iq\varphi}$$

se déduit de l'expression (25). On trouve :

$$K^{(2)}r^p e^{iq\varphi} = -p(p + 2)\,r^p r^{iq\varphi}$$

$$+ \frac{1}{4}(p - q)(p - q - 2)\,r^{p-1}e^{i(q+3)\varphi}$$

$$+ \frac{1}{4}(p + q)(p + q - 2)\,r^{p-1}e^{i(q-3)\varphi}$$

$$+ \frac{1}{2}(p - q)(p + q)\,r^{p-2}e^{iq\varphi}.$$

Soit $\alpha_{p,q}$ le coefficient du terme en question dans F. La relation de récurrence s'écrit :

$$(m - p)(m + p + 2)\,\alpha_{p,q} \tag{26}$$

$$+ \frac{1}{4}(p - q + 4)(p - q + 2)\,\alpha_{p+1,q-3}$$

$$+ \frac{1}{4}(p + q + 4)(p + q + 2)\,\alpha_{p+1,q+3}$$

$$+ \frac{1}{2}(p + q + 2)(p - q + 2)\,\alpha_{p+2,q} = 0.$$

Les coefficients des termes de plus haut degré sont notés $\alpha_{m,l}$. A partir des α_{mq} on détermine d'abord, grâce à (26), les $\alpha_{m-1,q}$, puis les $\alpha_{m-2,q}$ et ainsi de suite. Le problème de la détermination des polynômes F se trouve donc ramené à celui de la détermination des α_{mq}.

6. **L'opérateur du quatrième ordre.** — Suivant la méthode qui a été utilisée pour le second ordre, nous cherchons d'abord une forme quadratique répondant aux diverses conditions. Une possibilité simple est :

$$\frac{1}{2} S\, D_{12}^2 D_{31}^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial n_{23}^2}\right)^2.$$

L'opérateur correspondant s'écrit :

$$S \frac{\partial^2}{\partial n_{23}^2} D_{12}^2 D_{31}^2 \frac{\partial^2}{\partial n_{23}^2}.$$

Il faut d'abord être sûr qu'il commute avec $K^{(2)}$. Une transformation donne :

$$S\left(\frac{9}{16} G_1^2 + \frac{9}{8} G_1\right).$$

G_1 commutant avec $K^{(2)}$, le nouvel opérateur commute aussi. Il est manifeste d'autre part qu'il est indépendant de $K^{(2)}$. Nous prendrons comme forme quadratique :

$$Q_4[F] = \frac{8}{9} S\, D_{12}^2 D_{31}^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial n_{23}^2}\right)^2. \qquad (27)$$

L'opérateur associé sera noté $K'^{(4)}$. Pour le choix de l'opérateur définitif $K^{(4)}$, nous profiterons d'une certaine latitude de formation. Les coefficients a et b étant arbitraires, nous pouvons écrire d'une manière générale :

$$K^{(4)} = K'^{(4)} + a[K^{(2)}]^2 + bK^{(2)}. \qquad (28)$$

Le calcul de Q_4 en coordonnées polaires, bien qu'un peu long, ne présente aucune difficulté. On peut y mettre en évidence trois expressions différentielles :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

$$A = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2};$$

$$B = 2\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial \varphi}\right).$$

Dans la formation de $K'^{(4)}$, il faudra prendre soin de faire correspondre à un terme en $(\Delta F)^2$ de Q_4, un terme en $2\Delta^*\,\Delta F$ de $K'^{(4)}$, les opérateurs Δ^*, A^* et B^* étant définis par :

$$\Delta^* = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2},$$

$$A^* = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2}.$$

$$B^* = -\frac{2}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial \varphi}.$$

Les valeurs propres de $K'^{(4)}$ sont calculées en considérant uniquement les termes qui ne changent pas le degré. Si nous utilisons la forme trigonométrique, nous avons à chercher ce que devient une expression de la forme $r_m\, e^{iq\varphi}$. On trouve :

$$-\frac{1}{24}(m-q)(m-q-2)(m-q-4)(3m+q+6)\, r^m e^{i(q+6)\varphi}$$

$$+\frac{1}{12}(3m^2+6m-q^2)(3m^2+6m-q^2-8)\, r^m e^{iq\varphi}$$

$$-\frac{1}{24}(m+q)(m+q-2)(m+q-4)(3m-q+6)\, r^m e^{i(q-6)\varphi}.$$

Les autres termes donneraient des puissances inférieures de r et sont donc sans intérêt. On peut simplifier en prenant dans (28) :

$$a = -3/4, \qquad b = -2.$$

Le terme du milieu se réduit ainsi à :

$$(1/12)\, q^2(q^2 - 6m^2 - 12m + 8)\, r^m e^{iq\varphi}.$$

Nous adopterons les notations :

$$\left\{\begin{aligned} C_{mq}^{+} &= -(1/24)(m-q)(m-q-2)(m-q-4)(3m+q+6),\\ C_{mq}^{0} &= (1/12)\, q^2(q^2-6m^2-12m+8),\\ C_{mq}^{-} &= -(1/24)(m+q)(m+q-2)(m+q-4)(3m-q+6).\end{aligned}\right. \qquad (29)$$

Soit F un polynôme de degré m pris sous forme trigonométrique. En l'assujettissant à être fonction propre de $K^{(2)}$, on laisse indéterminés, comme nous l'avons vu plus haut, les coefficients des termes de plus haut degré. En faisant agir $K^{(4)}$, on obtient une relation de récurrence à trois termes et les huit cas contenus dans les formules (10) à (12) donnent lieu à 8 formes différentes. Il suffit pour obtenir les valeurs propres d'écrire dans chaque cas que le système linéaire est compatible. La reproduction détaillée des systèmes serait très longue. Nous allons plutôt donner un exemple.

Soit $m = 8$. Il existe neuf polynômes indépendants appartenant à la valeur propre — 80 de $K^{(2)}$. La forme générale des termes de plus haut degré est, d'après (10) à (12), pour les différentes symétries :

$$Q_8^{(s)} = r^8(\alpha_0 + \alpha_6 \cos 6\varphi),$$

$$Q_8^{(a)} = r^8 \sin 6\varphi,$$

$$\dot{Q}_8 = r^8(\alpha_2 \cos 2\varphi + \alpha_4 \cos 4\varphi + \alpha_8 \cos 8\varphi),$$

$$\ddot{Q}_8 = r^8(\beta_2 \sin 2\varphi + \beta_4 \sin 4\varphi + \beta_8 \sin 8\varphi).$$

Les systèmes linéaires qui déterminent à la fois

Polynômes de symétrie définie, jusqu'au degré cinq

Degré	V. P. de $K^{(2)}$	Genre (*)	V. P. de $K^{(4)}$	Polynômes sous la forme trigonométrique
0	0	S	0	1
1	-3	I 1	$-\frac{3}{4}$	$r \cos \varphi$
»	»	I 2	»	$r \sin \varphi$
2	-8	S	0	$1 - 4r^2$
»	»	I 1	-12	$r \cos \varphi - \frac{5}{2} r^2 \cos 2\varphi$
»	»	I 2	»	$r \sin \varphi + \frac{5}{2} r^2 \sin 2\varphi$
3	-15	S	$-\frac{315}{4}$	$1 - \frac{15}{2} r^2 + \frac{35}{4} r^3 \cos 3\varphi$
»	»	A	$-\frac{123}{4}$	$r^3 \sin 3\varphi$
»	»	I 1	$-\frac{27}{4}$	$r\left(1 - \frac{7}{2} r^2\right) \cos \varphi + r^2 \cos 2\varphi$
»	»	I 2	»	$r\left(1 - \frac{7}{2} r^2\right) \sin \varphi - r^2 \sin 2\varphi$
4	-24	S	0	$1 - 12r^2 - 16r^3 \cos 3\varphi + 36r^4$
»	»	I 1	$6(-17 + \sqrt{193})$	$r\left(1 - \frac{79}{18} r^2\right) \cos \varphi - \frac{r^2}{18} (31 - 109r^2) \cos 2\varphi$
				$+ \frac{19}{72} r^4 \cos 4\varphi + \frac{\sqrt{193}}{18} \Big[r^3 \cos \varphi$
				$- r^2(2 - 5r^2) \cos 2\varphi - \frac{13}{4} r^4 \cos 4\varphi\Big]$
»	»	I 1	$6(-17 - \sqrt{193})$	$r\left(1 - \frac{79}{18} r^2\right) \cos \varphi - \frac{r^2}{18} (31 - 109r^2) \cos 2\varphi$
				$+ \frac{19}{72} r^4 \cos 4\varphi - \frac{\sqrt{193}}{18} \Big[r^3 \cos \varphi$
				$- r^2(2 - 5r^2) \cos 2\varphi - \frac{13}{4} r^4 \cos 4\varphi\Big]$
»	»	I 2	$6(-17 + \sqrt{193})$	$r\left(1 - \frac{79}{18} r^2\right) \sin \varphi + \frac{r^2}{18} (31 - 109r^2) \sin 2\varphi$
				$+ \frac{19}{72} r^4 \sin 4\varphi + \frac{\sqrt{193}}{18} \Big[r^3 \sin \varphi$
				$+ r^2(2 - 5r^2) \sin 2\varphi - \frac{13}{4} r^4 \sin 4\varphi\Big]$
»	»	I 2	$6(-17 - \sqrt{193})$	$r\left(1 - \frac{79}{18} r^2\right) \sin \varphi + \frac{r^2}{18} (31 - 109r^2) \sin 2\varphi$
				$+ \frac{19}{72} r^4 \sin 4\varphi - \frac{\sqrt{193}}{18} \Big[r^3 \sin \varphi$
				$+ r^2(2 - 5r^2) \sin 2\varphi - \frac{13}{4} r^4 \sin 4\varphi\Big]$
5	-35	S	$-\frac{1\,155}{4}$	$1 - \frac{35}{2} r^2 + \frac{35}{4} r^3 \cos 3\varphi + \frac{105}{2} r^4 - \frac{385}{8} r^5 \cos 3\varphi$
»	»	A	$-\frac{3}{4}$	$r^3 \left(1 - \frac{5}{2} r^2\right) \sin 3\varphi$

(*) S : symétrique. — A : antisymétrique. — I 1 : symétrie intermédiaire de première espèce. — I 2 : symétrie intermédiaire de deuxième espèce.

Polynômes de symétrie définie, jusqu'au degré cinq (*suite*)

Degré	V. P. de $K^{(2)}$	Genre (*)	V. P. de $K^{(4)}$	Polynômes sous la forme trigonométrique
5	— 35	I 1	$\frac{3}{4}(-257 + 64\sqrt{19})$	$r\left(1 - \frac{210}{31} r^2 + \frac{176}{31} r^4\right) \cos \varphi - \frac{4r^2}{31}(19 - 103r^2) \times$ $\cos 2\varphi - \frac{32}{31} r^4 \cos 4\varphi - \frac{1\,397}{155} r^5 \cos 5\varphi$ $- 6\frac{\sqrt{19}}{31}\Big[r^3(3 - 2$ [illegible] $\cos \varphi - 2r^2(3 - 13r^2) \cos 2\varphi$ $+ 4r^4 \cos 4\varphi -$ [illegible] $s\, 5\varphi\Big]$
»	»	I 1	$\frac{3}{4}(-257 - 64\sqrt{19})$	$r\left(1 - \frac{210}{31} r^2 + \frac{176}{31} r^4\right) \cos \varphi - \frac{4r^2}{31}(19 - 103r^2) \times$ $\cos 2\varphi - \frac{32}{31} r^4 \cos 4\varphi - \frac{1\,397}{155} r^5 \cos 5\varphi$ $+ 6\frac{\sqrt{19}}{31}\Big[r^3(3 - 22r^2) \cos \varphi - 2r^2(3 - 13r^2) \cos 2\varphi$ $+ 4r^4 \cos 4\varphi - \frac{77}{10} r^5 \cos 5\varphi\Big]$
»	»	I 2	$\frac{3}{4}(-257 + 64\sqrt{19})$	$r\left(1 - \frac{210}{31} r^2 + \frac{176}{31} r^4\right) \sin \varphi + \frac{4r^2}{31}(19 - 103r^2) \times$ $\sin 2\varphi - \frac{32}{31} r^4 \sin 4\varphi + \frac{1\,397}{155} r^5 \sin 5\varphi$ $- 6\frac{\sqrt{19}}{31}\Big[r^3(3 - 22r^2) \sin \varphi + 2r^2(3 - 13r^2) \sin 2\varphi$ $+ 4r^4 \sin 4\varphi + \frac{77}{10} r^5 \sin 5\varphi\Big]$
»	»	I 2	$\frac{3}{4}(-257 - 64\sqrt{19})$	$r\left(1 - \frac{210}{31} r^2 + \frac{176}{31} r^4\right) \sin \varphi + \frac{4r^2}{31}(19 - 103r^2) \times$ $\sin 2\varphi - \frac{32}{31} r^4 \sin 4\varphi + \frac{1\,397}{155} r^5 \sin 5\varphi$ $+ 6\frac{\sqrt{19}}{31}\Big[r^3(3 - 22r^2) \sin \varphi + 2r^2(3 - 13r^2) \sin 2\varphi$ $+ 4r^4 \sin 4\varphi + \frac{77}{10} r^5 \sin 5\varphi\Big]$

(*) S : symétrie. — A : antisymétrie. — I 1 : symétrie intermédiaire de première espèce. — I 2 : symétrie intermédiaire de deuxième espèce.

les coefficients et les valeurs propres λ de $K^{(4)}$ sont :

$$\begin{cases} (1\,308 + \lambda)\,\alpha_6 + 480\,\alpha_0 = 0, \\ 1\,680\,\alpha_6 + \lambda\,\alpha_0 = 0. \end{cases}$$

$$\lambda = -1\,308.$$

$$\begin{cases} (156 + \lambda)\,\alpha_2 + 1\,040\,\alpha_4 + 2\,464\,\alpha_8 = 0, \\ 560\,\alpha_2 + (608 + \lambda)\,\alpha_4 = 0, \\ 64\,\alpha_2 + (2\,176 + \lambda)\,\alpha_8 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (156 + \lambda)\,\beta_2 - 1\,040\,\beta_4 + 2\,464\,\beta_8 = 0, \\ -560\,\beta_2 + (608 + \lambda)\,\beta_4 = 0. \\ 64\,\beta_2 + (2\,176 + \lambda)\,\beta_8 = 0. \end{cases}$$

En pratique, il sera probablement exceptionnel de pousser une approximation jusqu'au degré 8. Mais il sera utile de connaître les premiers polynômes. En voici le tableau (pp. 91-92).

7. Représentation d'une fonction de r_1, r_2, r_3. — Soit à représenter une fonction d'onde d'état *S*. C'est une combinaison linéaire de produits d'une fonction d'espace par une fonction de spin. Si les particules sont des fermions, elle doit être antisymétrique. Si ce sont des bosons, elle doit être symétrique. Pour un calcul de variation, il y aura intérêt à considérer d'abord des fonctions des

variables d'espace caractérisées par une symétrie déterminée :

$$\psi^{(s)}, \quad \psi^{(a)}, \quad \dot{\psi}, \quad \ddot{\psi}.$$

Pour les représenter, on constituera une série de produits :

$$R_l(s)\, F_{mn}(x, y)$$

ayant la symétrie désirée. La famille de fonctions $R_l(s)$ sera déduite d'un problème de Sturm-Liouville choisi d'après la forme des termes du second ordre en s dans le hamiltonien. Pour une symétrie intermédiaire de première espèce, par exemple :

$$\dot{\psi}(r_1, r_2, r_3) = \sum a_{lmn}\, R_l(s)\, \dot{F}_{mn}(x, y).$$

Le tableau permet de connaître déjà 7 polynômes $\dot{F}_{mn}$. C'est probablement beaucoup plus qu'il n'en faut pour obtenir une bonne approximation dans un calcul de variation. Il restera à multiplier par une fonction de spin pour constituer une fonction d'onde approchée du système.

Manuscrit reçu le 13 juillet 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Appell (P.) et Kampé de Fériet (J.), Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynômes d'Hermite. Gauthier-Villars, Paris, 1926.

[2] Munschy (G.) et Pluvinage (P.), *J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 157.

REVUE DES LIVRES

Blanc (D.), **Détecteurs de particules. Compteurs et scintillateurs.** (1 vol., 17 × 25,2 cm, 324 pages, Masson et Cie, éditeurs, Paris, 1959, 39 NF.)

Les ouvrages traitant de la détection des particules sont relativement anciens, surtout ceux en langue française. Le développement accéléré des techniques exige de la part des nouveaux utilisateurs un travail important de recherches bibliographiques pour en connaître l'état actuel.

M. Blanc a fait ce travail ; il présente et expose remarquablement l'ensemble de nos connaissances sur les détecteurs de particules : chambres d'ionisation, compteurs des divers types (proportionnels, Geiger-Müller, compteurs à étincelles, à conduction électrique, photomultiplicateurs, scintillateurs).

Les étudiants, les physiciens, les chimistes, les médecins qui ont à utiliser ces détecteurs tireront un bénéfice certain de la lecture de ce livre qui leur précisera et les principes de fonctionnement et les conditions optima d'emploi des divers détecteurs suivant la nature des particules étudiées. L'ouvrage n'est pas surchargé de développements théoriques ; le mécanisme des phénomènes physiques très nombreux qui interviennent dans ces détecteurs est, malgré leur complexité, rendu simplement et par conséquent aisément compréhensible.

Le livre comprend 16 chapitres dont les titres sont indiqués ci-dessous. On trouve dans un appendice une quantité de valeurs numériques indispensables et l'auteur indique un nombre important de références bibliographiques (1 500 environ) renvoyant aux publications.

I : Généralités. II : Chambres d'ionisation. III : Compteurs proportionnels. IV : Le mécanisme des compteurs de Geiger-Müller. V : Compteurs de Geiger-Müller à cylindre de verre et surface conductrice externe. VI : Compteurs remplis d'une vapeur polyatomique pure : VII : Compteurs contenant des gaz électronégatifs. VIII : Les compteurs à étincelles. IX : Les détecteurs à conduction électrique. X : Chambres d'ionisation et compteurs pour neutrons. XI : Les photomultiplicateurs. XII : Compteurs basés sur l'effet Cerenkov. XIII : Scintillateurs pour particules ionisantes, XIV : Scintillateurs pour la détection des neutrons. XV : Réalisation des détecteurs de particules.

Dupuy.

Yaglom (A. M.) et Yaglom (I. M.), **Probabilité et information.** (Monographie Dunod.) (1 vol., 11 × 16,5 cm, 175 pages, Dunod, Paris, 1959.)

Il y a d'étranges analogies entre la thermodynamique et la théorie des télécommunications. Dans leur développement historique, déjà on peut constater parallèlement que les praticiens avaient, dans les deux domaines, poussé très loin les applications avant que les théoriciens ne se préoccupent de déterminer les bornes que celles-ci ne sauraient transgresser. La théorie des communications ne date pas, en effet, dans son ensemble, de plus d'une dizaine d'années, si l'on excepte les travaux précurseurs de Hartley. Sa nouveauté est pourtant maintenant suffisamment émoussée pour que l'utilisation de ses résultats soit entrée dans la pratique courante. Après les exposés de base, on attendait un ouvrage de vulgarisation qui rende accessible les principes fondamentaux aux praticiens qui appliquent leurs conséquences tous les jours. C'est à ce besoin que répond la nouvelle monographie Dunod. *Probabilités et informations* de A. M. Yaglom et I. M. Yaglom, excellemment traduit du russe par M. W. Mercouroff. Sans dépasser jamais le niveau des mathématiques élémentaires, ces auteurs réussissent à exposer la notions délicates d'entropie et d'information. Il est évident que dans ces conditions le lecteur averti trouvera certaines démonstrations un peu longues. C'est toutefois un inconvénient inévitable de cette façon de faire qui a par contre le mérite de mettre à la portée de l'honnête homme des conceptions que l'on pouvait croire réservées à un public restreint de spécialistes. Il faut préciser que cette vulgarisation échappe complètement aux reproches que l'on peut faire aux ouvrages de ce genre : les problèmes sont posés honnêtement ; aucune difficulté n'est esquivée ; il n'y a pas de simplification sommaire ou inexacte.

Cette monographie doit donc rendre de grands services à tous les praticiens des communications. Elle doit leur permettre d'apprécier la nature des difficultés auxquelles se heurtent les réalisations.

En plus, grâce à de multiples problèmes concrets, elle constitue pour tout le monde un excellent moyen d'entraînement pour l'esprit et un instrument de culture générale.

M. Pauthier.

ÉMISSION ÉLECTRONIQUE DE JONCTIONS P-N [1]

Par R. GOFFAUX,

Laboratoire de Recherches Physiques.
Ateliers de Constructions Électriques de Charleroi (Belgique).

Résumé. — La relation expérimentale entre le courant inverse et le courant d'émission électronique d'une jonction p-n superficielle établie par Patrick a pu être interprétée, d'une manière satisfaisante, à l'aide du concept de la température électronique. Il existe un accord satisfaisant entre les valeurs théorique et expérimentale de l'énergie d'activation des centres donneurs et des centres pièges. L'émission d'électrons chauds pourrait être un mode d'émission électronique très utile.

Abstract. — The experimental relation between the reverse current and the electron emission current from p-n junctions, proposed by Patrick, has been satisfactorily interpreted on the basis of the electron temperature. A good agreement exists between the theoretical and experimental values of the activation energy of donor centers and traps. Hot electron emission could be a useful mode of electron emission.

1. Plusieurs auteurs [1], et en particulier Patrick [2], ont publié des résultats montrant une relation entre le courant inverse I_R d'une jonction p-n superficielle et le courant d'émission électronique I_E.

Pour des intensités de courant inférieures à 10^{-10} A, la relation entre les deux courants est de la forme $I_E \sim I_R^K$ où K est une constante dont la valeur pour des jonctions sur le SiC est voisine de 9. Pour des courants supérieurs à 10^{-10} A, le courant d'émission électronique augmente moins rapidement.

Jusqu'ici aucune explication satisfaisante de cette relation n'a été publiée. Les auteurs susmentionnés ont rejeté l'émission d'origine thermionique car les intensités d'émission électronique observées en courant continu et en régime d'impulsions d'une durée voisine de la microseconde sont assez comparables. D'autre part, l'émission électronique par effet de champ (field emission) semble être aussi un mécanisme à rejeter car les courants d'émission d'intensité supérieure à 10^{-10} A sembleraient être imputables, d'après ces auteurs, à un effet de charge d'espace. On sait, en effet, qu'en régime d'émission de charge d'espace, le champ à la cathode est nul.

Une explication possible de cette relation peut être établie en tenant compte du concept de la température électronique. Nous nous proposons de discuter cette relation à l'aide de ce concept appliqué au cas du carbure de silicium et développé dans d'autres publications [3]. Le modèle quantique que nous avions adopté pour le carbure de silicium comprend deux séries de niveaux :

a) Une série de niveaux (S) proches de la bande de conduction (énergie d'activation voisine de 0,1 eV) qui agissent essentiellement en niveaux-pièges.

b) Une série de niveaux (D) plus profonds (énergie d'activation voisine de 0,3 eV) qui correspondent aux centres donneurs.

Le niveau de Fermi, à la température ambiante, est supposé être voisin des niveaux D de sorte que ces derniers sont occupés tandis que les niveaux (S) sont presque vides. Nous admettons que les électrons dans la bande de conduction et ceux occupant les niveaux pièges S sont constamment en équilibre thermique du fait qu'ils effectuent des collisions plus fréquentes entre eux qu'avec le réseau.

Frohlich [4] a montré que, sous l'influence d'un champ électrique intense, la température électronique T peut devenir sensiblement supérieure à la température du réseau T_0 lorsque la densité des porteurs (n) est assez élevée — c'est-à-dire lorsque $n \geqslant 10^{14}$ cm^{-3} — (cette condition est observée dans le carbure de silicium).

En établissant le bilan entre l'énergie prélevée au champ électrique F par les électrons libres et celle dissipée par collisions avec le réseau (supposé vibrer à la fréquence unique ν) Frohlich a déduit la relation suivante, entre la température électronique T et la température du réseau T_0 :

$$\exp\left(\frac{h\nu}{kT_0} - \frac{h\nu}{kT}\right) = 1 + HF^2 \qquad (1)$$

où H représente un facteur qui dépend de la nature du matériau et des caractéristiques des niveaux énergétiques du modèle.

Cette relation est valable jusqu'à des fréquences d'excitation de l'ordre de 10^{11} Hz.

[1] Recherche subventionnée par l'Institut pour l'encouragement de la Recherche Scientifique dans l'Industrie et l'Agriculture (IRSIA).

A l'équilibre thermodynamique, la densité de porteurs libres (n) est définie par la relation :

$$n = N_c \exp(-E_F/kT) \quad (2)$$

où E_F est l'énergie du niveau de Fermi.

On peut vérifier, en comparant (1) et (2), qu'un accroissement du champ électrique entraîne une augmentation de la conductibilité électrique. L'accroissement de la conductibilité est due à l'ionisation des centres donneurs par les électrons C thermiques rapides. La constante de temps d'ionisation moyenne des centres donneurs par les électrons rapides serait inférieure à la microseconde dans le cas de champ électrique intense [3]. Ceci permettrait d'interpréter l'observation de Patrick selon laquelle le courant d'émission électronique ne varierait guère lorsque la durée de l'impulsion de tension devient de l'ordre de la microseconde.

2. Nous discuterons d'abord la loi de variation du courant inverse I_R en fonction de la tension appliquée. D'après la théorie du redressement d'une jonction p-n due à Shockley [5], le courant inverse tend vers une valeur limite — le courant de saturation I_S — lorsque la tension inverse (U) devient suffisamment grande pour que : $U \gg kT$.

La théorie de Shockley fait appel à deux hypothèses :

1) La barrière est assez étroite pour que la recombinaison des paires électrons-trous soit négligeable.

2) Le champ de diffusion est plus intense que le champ de conduction.

Le courant de saturation I_S est dû à la diffusion de porteurs minoritaires jusque dans la jonction où ils sont attirés par le champ électrique.

Dans le cas d'une jonction de largeur normale polarisée en sens inverse, le champ électrique qui siège dans la jonction est intense, la condition 2 n'est plus satisfaite et on n'observe plus de courant de saturation. On peut interpréter cette observation en remarquant que les porteurs minoritaires qui diffusent jusque dans la barrière ont une température électronique T sensiblement supérieure à celle du réseau T_0. Dès lors, les électrons thermiques rapides créent des porteurs par collisions inélastiques avec le réseau et avec les centres d'impuretés.

La loi d'accroissement de la conduction serait celle des varistances et le courant inverse aurait pour expression :

$$I = I_S(1 + aU)^{K_1} [1 - \exp(-eU/kT)] \quad (3)$$

où I_S est le courant inverse de saturation classique donné par l'expression :

$$I_S = \frac{b}{(1+b)^2} \sigma_1^2 \frac{kT}{e} \left(\frac{1}{\sigma_n L_p} + \frac{1}{\sigma_p L_n}\right)$$

(les symboles ont leur signification habituelle) :

a est une constante qui dépend du facteur H et

$$K_1 = (V + \Delta V)/h\nu.$$

La relation (3) peut être obtenue directement en comparant les relations (1) et (2). Elle semble bien vérifiée par les travaux expérimentaux de Schottky [6] relatifs à la variation de la résistance inverse en fonction de la tension et de la température.

Lorsque la tension appliquée augmente à une valeur telle que $aU \gg 1$ et $eU \gg kT$, la loi de variation du courant inverse en fonction de la tension U devient :

$$I_R = I_S(aU)^{K_1}. \quad (4)$$

La relation (4) semble bien vérifiée sur les redresseurs à jonction et à pointe lorsque la tension appliquée n'est cependant pas trop élevée pour déclencher la disruption.

3. Le courant d'émission électronique I_E est dû aux électrons libres suffisamment rapides qui s'échappent de la surface du semi-conducteur et qui sont collectés par l'anode. Il répond à la loi de Richardson :

$$I_E \sim N_c \exp.(-\varphi/kT) \quad (5)$$

où φ est le travail d'extraction d'un électron du semi-conducteur compté à partir du niveau de Fermi.

En tenant compte comme pour (3) de la définition de la température électronique T et de la relation (2) et en supposant que la tension appliquée est suffisamment grande pour que $aU \gg 1$, la loi de variation du courant d'émission électronique devient immédiatement :

$$I_E = I_0(aU)^{K_2} \quad (6)$$

où

$$K_2 = (\varphi + \Delta V)/h\nu$$

et

$$I_0 \sim N_c \exp - \varphi/kT_0$$

Si nous comparons maintenant les relations (4) et (6), nous obtenons immédiatement la relation :

$$I_E \sim I_R^K \quad (7)$$

où

$$K = (\varphi + \Delta V)/(V + \Delta V).$$

La relation (7) a la même forme que celle publiée par Patrick pour le carbure de silicium lorsque le courant n'est pas trop élevé.

D'après Philipp [7] la valeur du travail d'extraction φ d'un électron du carbure de silicium serait voisine de 4 eV. Ainsi, en reprenant la valeur de $K = 9$ de la figure publiée par Patrick, nous obtenons : $V + \Delta V = 0{,}45$ eV. Ceci semble en bon

accord avec nos résultats antérieurs obtenus sur le carbure de silicium selon lesquels : $V \sim 0{,}3$ eV et $h\nu \sim \Delta V \sim 0{,}1$ eV.

4. **Remarques.** — 1) Les relations (4), (6) et (7) ont été obtenues en supposant une distribution uniforme du courant inverse I_R et du courant d'émission I_E. En réalité, les courants I_R et I_E sont émis à partir de petites surface confinées dans des régions particulières du cristal (dislocations ou autres défauts du réseau). On peut d'ailleurs observer, au microscope optique, ces petites surfaces ; elles sont le siège de l'électroluminescence due à la recombinaison de paires électrons-trous ou de porteurs-centres ionisés, la jonction étant polarisée dans le sens inverse.

Dans ce cas, la relation (7) se transforme aisément et devient :

$$\frac{I_E}{I_R} = \frac{\sum_i I_{0i}(1 + a_i U)^{K_{1i}}}{\sum_i I_{si}(1 + a_i U)^{K_{1i}}}. \qquad (8)$$

On peut s'attendre raisonnablement à ce que des surfaces d'émission soient plus actives que d'autres. Dans ce cas, on tend vers le cas d'une émission uniforme. Cependant, l'exposant K déduit de la relation (8) sera plus petit que celui tiré de la relation (7), ce qui semblerait améliorer davantage l'accord entre les valeurs théoriques de V et ΔV déduites de la relation (7) et de la théorie des varistances et les valeurs adoptées dans notre modèle quantique.

2) La réduction de l'exposant K (dans la relation (7)), lorsque l'intensité de courant excède 10^{-10} A peut être imputable, dans une certaine mesure, à la saturation de l'émission de certaines surfaces actives.

5. **Conclusions.** — Nous avons pu interpréter, d'une manière satisfaisante, la relation existant entre le courant inverse et le courant d'émission électronique d'une jonction p-n superficielle à l'aide du concept de la température électronique. L'accord satisfaisant entre la valeur théorique de V et de ΔV déduite de cette discussion et la valeur expérimentale constitue un appui sérieux à notre modèle. L'émission d'électrons « chauds » pourrait être un mode d'émission très utile car il ne nécessite pas une source de chauffage, comme dans le cas de l'émission thermionique, ni des champs électriques très intenses, comme dans le cas de l'émission par effet de champ.

Manuscrit reçu le 16 novembre 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Burton (J. A.), *Phys. Rev.*, 1957, **108**, 1342. Tauc (J.), *Nature*, 1958, **181**, 38.
[2] Patrick (L.) et Choyke (W. J.), Letter to Editor. *Phys. Rev.*, 1959, **2**, 48.
[3] Goffaux (R.), *Rev. Gén. Électr.*, 1957, **66**, 463-569. Proc. Conference on Silicon Carbide, Boston, 1959. A être publié.
[4] Frohlich (H.), *Proc. Roy. Soc.*, London, 1947, **188** A, 521 ; *Proc. Phys. Soc.*, London, 1950, **63** A, 81. Frohlich (H.) et Paranjape (B. V.), *Proc. Phys. Soc.*, London, 1956, **69** B, 21.
[5] Shockley (W.), Holes and Electrons in Semiconductors. D. Nostrand, 1950.
[6] Goffaux (R.), Comptes rendus. Conférence sur la Physique de l'état solide, Bruxelles, 1958, 498, (1960).
[7] Philipp (H. R.), *Phys. Rev.*, 1958, **III**, 440.

OBSERVATION DIRECTE DE QUELQUES ASPECTS DU RÉSEAU CRISTALLIN DES PHTALOCYANATES DE PLATINE ET DE CUIVRE AU MICROSCOPE ÉLECTRONIQUE

Par Mme H. ESPAGNE,
Laboratoire d'Optique Électronique du C. N. R. S., Toulouse.

Résumé. — Le très haut pouvoir de résolution des meilleurs microscopes électroniques permet de s'attaquer à l'observation directe des plans réticulaires de phtalocyanates de cuivre et de platine. On peut, sur les clichés obtenus, mesurer les distances de ces plans et voir les dislocations du réseau cristallin.

Abstract. — The very high resolving power of the best electron microscopes allows one to attempt the direct observation of crystal lattices in crystals of copper and platinum phthalocyanates. We obtained images on which it is possible to measure the spacings between the crystal planes and to observe dislocations in the crystal lattice.

Parmi les substances cristallines, certains phtalocyanates se présentent sous une forme qui permet la photographie directe d'une famille de plans réticulaires.

J. W. Menter a, le premier, étudié au microscope électronique le réseau cristallin des phtalocyanates de cuivre et de platine [1]. Pour ces composés, cristallisés dans le système monoclinique, nous avons pu, par photographie des plans $(20\bar{1})$: 1° Mesurer l'écartement de ces plans et constater que, généralement, les résultats obtenus sont en accord avec ceux que donnent les rayons X ; 2° Observer la corrélation entre les déformations des cristaux et la distribution des plans $(20\bar{1})$; 3° Examiner les dislocations de ces plans et, parallèlement, observer les modifications de structure qu'elles entraînent ; 4° Rencontrer plusieurs variétés de phtalocyanates de cuivre dont le pas du réseau est différent ; 5° Photographier, enfin, quelques figures de moirés, superposées aux deux réseaux qui leur donnent naissance.

Structure des phtalocyanates. — Les phtalocyanates de cuivre et de platine se présentent sous la forme de rubans généralement plats ; mais, lorsque leur épaisseur ne dépasse pas quelques centaines d'angströms, ces rubans peuvent subir des torsions diverses. Robertson et Woodward ont fait, à l'aide des rayons X, une étude [2] très complète de ces composés. Aussi nous limiterons-nous à l'exposé des détails susceptibles de faciliter la compréhension du présent travail. En effet, certains plans vont prendre pour nous une importance particulière : les plans (001) dont fait partie la surface du « ruban » ; les plans $(20\bar{1})$ parallèles à la lisière du ruban et faisant avec les plans (001) un angle voisin de 90° caractéristique du composé (88° pour le phtalocyanate de platine, 80° pour le phtalocyanate de cuivre).

Les distances réticulaires sont connues grâce aux rayons X : dans le phtalocyanate de platine, deux plans $(20\bar{1})$ sont distants de 11,94 Å et, dans le phtalocyanate de cuivre de 9,8 Å seulement.

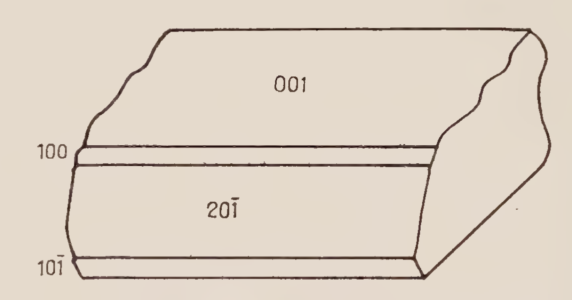


Fig. 1. — Phtalocyanate de cuivre d'après Robertson.

Nous verrons que, pour cette dernière substance, les résultats trouvés par observation directe peuvent s'écarter de cette valeur.

Dispositif expérimental. — Les préparations : Les préparations ont été obtenues à partir de phtalocyanate de cuivre du commerce et de phtalocyanate de platine préparé en laboratoire. Le phtalocyanate de platine est directement utilisable ; au contraire, le phtalocyanate de cuivre doit subir une recristallisation soit par sublimation, soit par passage dans de la quinoléine. Deux techniques nous ont donné des résultats satisfaisants :

1° Par sublimation du produit à 500° C dans un four électrique et refroidissement, nous avons obtenu la formation directe de cristaux sur les grilles porte-objet. Les cristaux ainsi formés sont généralement perpendiculaires au bord des carrés de grille. La surface des « rubans » fait un angle faible avec le plan de la grille et les chances sont grandes, pour le phtalocyanate de cuivre, qu'une

partie des cristaux se présente au faisceau sous un angle favorable à la séparation des plans $(20\bar{1})$. Nous verrons en effet plus loin (formation de l'image) le rôle primordial de l'orientation relative des spécimens et du faisceau d'électrons.

2° Les cristaux broyés et mis en suspension dans l'alcool sont déposés sur une mince membrane de parlodion-carbone [3].

L'absence de support (1re méthode) présente des avantages. En effet, le contraste est amélioré par la suppression de la diffusion due à cette membrane. Les cristaux de phtalocyanate de cuivre ont, comme nous venons de le voir, des chances plus nombreuses de se présenter sous une bonne orientation. Enfin une forte proportion de rubans s'enroulent en hélice ou prennent des courbures diverses qui donnent lieu à des observations intéressantes. Mais dès que l'éclairement dépasse une certaine intensité, les rubans fixés par une seule de leurs extrémités deviennent mobiles sous l'effet des électrons. Aussi doit-on opérer avec un très faible éclairement et des temps de pose prolongés (jusqu'à 15 secondes). La lenteur du procédé a pour conséquence la contamination des spécimens.

Au contraire, la présence d'une membrane-support rend les cristaux moins sensibles à l'action des électrons. D'autre part les cristaux qui adhèrent à la membrane, lorsque celle-ci se présente sous un angle favorable, possèdent des surfaces beaucoup plus étendues où les stries, projections des plans $(20\bar{1})$, sont visibles. Cependant, pour le phtalocyanate de cuivre, nous avons fait la remarque suivante : les valeurs des distances réticulaires $(20\bar{1})$ des cristaux disposés sur un support s'écartent parfois des valeurs trouvées pour les spécimens provenant d'une sublimation directe.

En résumé nous pensons qu'il est intéressant de faire appel selon le cas, à l'une ou l'autre méthode.

2° Le microscope : Le microscope utilisé est l'Émilskop-I des Éts Siemens. Muni d'un double condenseur, il permet d'éviter un échauffement excessif de la préparation. L'objectif est muni d'un diaphragme de 50 μ destiné à éliminer une partie des électrons diffusés et à réduire les conséquences de l'aberration de sphéricité. Dans ces conditions, seuls participent à la formation de l'image les spectres de diffraction, d'ordre 0 et 1. (Voir plus loin la formation de l'image.)

Le grandissement *direct* sous lequel nous avons travaillé a été au départ de 80 000. Par la suite nous l'avons porté à 92 000. Ce grandissement a été évalué avec une précision de 1,5 %. Nous l'avons mesuré en plusieurs étapes, en utilisant une empreinte de réseau de Rowland dont les impuretés, sous forme de fines particules, nous ont servi de points de repère.

La tension d'accélération des électrons a été fixée à 80 kV pour toutes les expériences.

Plaques photographiques. — Nous nous sommes servis tantôt des *Kodak medium*, tantôt des *Ilford special contrasty*.

Formation de l'image dans le microscope. — Dans certaines conditions le microscope électronique à haute résolution permet d'individualiser les plans réticulaires $(20\bar{1})$ dont la distance (10 Å environ) est précisément de l'ordre de grandeur du pouvoir de résolution.

Le spécimen reçoit un faisceau cohérent d'électrons accélérés sous une tension de 80 kV. La longueur d'onde correspondante a pour valeur 0,0417 Å.

Si nous considérons un cristal de phtalocyanate déposé sur une grille d'observation, les plans $(20\bar{1})$, en première approximation, se présentent parallèlement au faisceau électronique. Tandis qu'une partie des électrons rencontrent les atomes composant les plans réticulaires $(20\bar{1})$ et subissent une diffusion, le reste du faisceau est directement transmis.

Parmi les électrons diffusés, les uns subissent une *diffusion inélastique* : nous pouvons admettre que la répartition de l'intensité lumineuse qui en résulte sur la plaque varie périodiquement, avec précisément comme période la constante réticulaire du cristal. Pour les autres électrons, *la diffusion est élastique* et entraîne une variation de phase périodique du faisceau à la traversée du cristal. Pour que les ondes diffusées élastiquement par les plans $(20\bar{1})$ soient en phase, la relation de Bragg :

$$n\lambda = 2d \sin \theta$$

doit être satisfaite.

λ = longueur d'onde des électrons
d = distance réticulaire
θ = angle de Bragg.

Les différentes valeurs de n correspondent aux spectres successifs de diffraction. Pour le spectre d'ordre 1, en prenant pour d la valeur de 10 Å nous obtenons $\sin \theta = 0{,}002$ d'où $\theta = 7'$. Le faisceau diffracté du premier ordre fait donc avec le faisceau incident un angle sensiblement égal à 14'. De l'interférence de ces faisceaux résulte, dans le plan image, une répartition de l'intensité qui reproduit la périodicité du réseau cristallin. L'aspect de l'image sera donc celui de raies alternativement sombres et claires dont la distance correspond précisément au pas du réseau selon la théorie d'Abbe [4]. Nous ne pouvons cependant pas admettre que les lignes obtenues sur les clichés constituent une représentation absolument fidèle des

plans $(20\bar{1})$ étudiés puisque l'emploi du diaphragme d'objectif élimine les spectres de diffraction d'ordre supérieur à 1. En définitive l'image obtenue doit être considérée comme résultant de l'interférence des spectres de diffraction d'ordre zéro (lumière directement transmise) et d'ordre 1. Compte tenu de la faible valeur de θ et de la nécessité de l'existence d'électrons directement transmis nous allons étudier de plus près les conditions que doit remplir le spécimen pour offrir le maximum de probabilités de résolution des plans $(20\bar{1})$.

1° Comme nous l'avons vu, l'angle $[(001), (20\bar{1})]$ n'est pas de 90° mais de 88° pour le phtalocyanate de platine et de 80° pour le phtalocyanate de cuivre.

Les électrons qui remplissent les conditions nécessaires pour contribuer à la formation de l'image doivent encore obéir à une dernière nécessité : Un électron provenant de l'arête supérieure B du plan figuré par BB′ sur notre croquis ne doit rencontrer ni le plan AA′, ni le plan CC′.

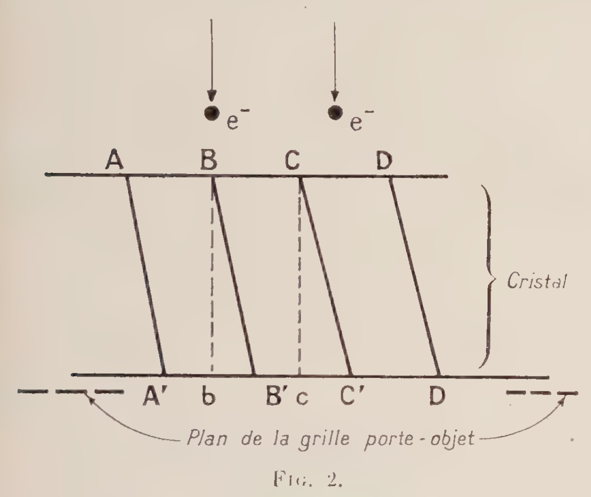


Fig. 2.

La projection de B sur A′B′, dans le sens du faisceau, doit donc être comprise entre A′ et B′. Ceci impose une relation très simple entre l'épaisseur du cristal et l'angle que fait celui-ci avec la direction du faisceau ou avec la direction du plan de la grille. Nous supposons que le faisceau est normal au plan de la grille-support. Par exemple pour un cristal de phtalocyanate de cuivre d'une épaisseur égale à 100 Å la surface du « ruban » doit former avec le plan horizontal un angle compris entre 4° et 10°. La latitude d'orientation, égale dans ce cas à 6°, varie en raison inverse de l'épaisseur des cristaux.

Pour le phtalocyanate de platine où l'angle $[(001), (20\bar{1})]$ atteint 88°, un cristal de la même épaisseur, soit 100 Å, reposant horizontalement sur la grille, aurait, sur le cliché, ses plans $(20\bar{1})$ parfaitement résolus. On comprend dès lors pourquoi, lorsqu'on utilise un film support, qui impose son orientation aux cristaux, les résultats positifs soient beaucoup moins fréquents avec le phtalocyanate de cuivre qu'avec le phtalocyanate de platine.

Les résultats. — L'examen des résultats obtenus avec les phtalocyanates de cuivre et de platine sera conduit parallèlement pour ces deux composés car l'un et l'autre se prêtent, morphologiquement, aux mêmes observations. La seule différence réside dans la valeur du pas du réseau $(20\bar{1})$.

Avant d'aller plus loin, nous insistons particulièrement sur la nécessité d'une correction d'astigmatisme très rigoureuse. En effet, dès que la direction de l'astigmatisme résiduel cesse d'être parallèle aux plans observés, les « artéfacts » qui en résultent rendent impossible une interprétation correcte des clichés.

Mesure du pas du réseau. — Les cristaux obtenus par sublimation et recristallisation sur les grilles présentent des plages parfaitement striées, bien contrastées que nous avons utilisées pour mesurer la distance réticulaire $(20\bar{1})$ (fig. 4, 5, 6). Pour le phtalocyanate de cuivre provenant de cette première méthode, ce pas a été trouvé égal à 9,9 Å ∓ 0,2 Å.

Pour le phtalocyanate de platine, le pas trouvé est de 12 Å ∓ 0,2 Å. Ces valeurs sont en accord avec les résultats obtenus par les rayons X. Nous verrons plus loin cependant les anomalies observées avec le composé de cuivre obtenu par la deuxième méthode de préparation. L'examen de tous les clichés, excepté celui de la figure 8, dont le bord du cristal est vraisemblablement brisé, nous montrent que les lignes suivent fidèlement la direction de la lisière du ruban, quelle que soit sa forme (rectiligne, courbée, spiralée).

Cet ensemble de constatations nous permet d'affirmer que les lignes obtenues sont bien la représentation de l'image en projection des plans $(20\bar{1})$.

Les cristaux provenant d'une sublimation se présentent, dans environ 5 % des cas, sous forme d'hélice. Il est difficile d'affirmer si la cristallisation s'est effectuée directement sous cette forme ou si la transformation en hélice s'est produite ultérieurement dans le microscope. Mais, tandis que sous l'effet d'un éclairement intense nous avons observé des mouvements plus ou moins rapides des cristaux, jamais nous ne les avons vus s'enrouler spontanément en hélice. Aussi opterons-nous pour la première hypothèse.

Les figures 3 et 7 représentent de telles hélices. Les zones striées occupent toute la largeur du cristal et se répètent périodiquement. Aux endroits où elles sont apparentes, nous les voyons s'incurver et suivre la torsion du cristal. La figure 7 les montre visibles sur une longueur de 200 Å.

Dislocations. — La structure des plans $(20\bar{1})$ apparaît nettement sur des plages plus ou moins vastes, parfois sur la totalité du spécimen. A la limite de telles plages, ou bien les raies s'estompent et se fondent dans une zone diffuse parce que l'orientation par rapport au faisceau n'est pas correcte (hélices), ou bien les raies cessent d'être continues. Dans ce cas, les changements de direction semblent traduire non plus une déformation du cristal mais un bouleversement dans la structure du réseau cristallin lui-même (fig. 6). Nous avons alors une série de dislocations. Ces dislocations sont difficiles à étudier car le bouleversement des plans $(20\bar{1})$ est nécessairement lié à une altération de la structure entière du réseau, ce qui affecte la projection sur le plan image de la famille des plans observés. Une grande prudence dans l'interprétation s'impose.

A l'opposé des dislocations en série, il en existe d'un type parfaitement observable et caractéristique : c'est l'apparition d'un plan nouveau au sein du réseau. Elle peut s'effectuer suivant deux processus différents, comme le montre la figure 11 :

Ces deux types de dislocations sont également visibles sur la figure 12, où une série de dislocations entraîne le partage d'un cristal. Au sein du réseau — jusque là régulier — des plans $(20\bar{1})$, apparaît en A un nouveau plan réticulaire (dislocation du type 1).

Dans la partie du réseau située à gauche (*g*) de cette dislocation, les lignes reprennent après une légère perturbation leur orientation initiale. Dans la partie droite (*D*) ces mêmes lignes s'en écartent maintenant de 1°30′.

En B, au-dessus de la première dislocation, un plan se scinde pour donner naissance à un dièdre (dislocation du type 2). Mais la ligne AB semble constituer une région de moindre résistance car le cristal commence à se partager en (C). Dans la région (*g*), à gauche, les plans réticulaires conservent toujours la même orientation. Dans la région (*d*), à droite, les lignes qui s'étaient écartées une première fois de 1° 30′ changent encore d'orientation, s'inclinent vers la gauche et forment désormais un angle d'environ 8° avec la direction initiale.

Comme nous l'avons exposé plus haut, lorsque des cristaux déposés sur une membrane sont convenablement orientés, nous avons alors la chance d'obtenir de vastes plages parfaitement striées. Tel est le cas des figures 10 et 12. Sur ces deux clichés représentant du phtalocyanate de cuivre, le pas du réseau $(20\bar{1})$ est 10,8 Å. Cependant un examen plus attentif nous fait remarquer que le cristal n° 3 de la figure 12 possède un pas plus faible. La distance réticulaire mesurée est de 8,84 Å. La faible valeur de *d* explique, pour ce cristal, que les raies soient moins nettes que pour les voisins. Cette valeur n'est pas un cas unique. Nous l'avons retrouvée sur une vaste plage d'un autre spécimen. Les deux cristaux provenaient du même produit brut.

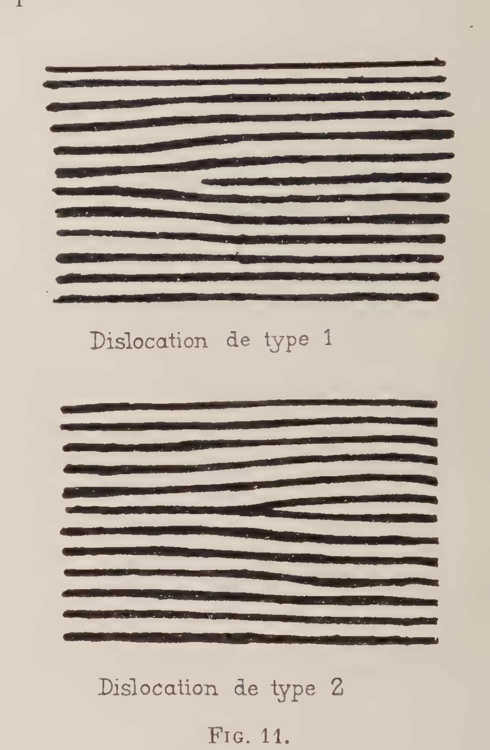


Fig. 11.

Planche I →

Fig. 3. — Hélice de phtalocyanate de platine. Les plans $(20\bar{1})$ sont visibles en A, B, C, D, à chaque torsion de l'hélice.

Fig. 4. — Phtalocyanate de platine. On peut voir, en C, l'épaisseur de la contamination.

Fig. 5. — Phtalocyanate de cuivre.

Fig. 6. — Phtalocyanate de platine. (C indique la contamination.)

Fig. 7. — Phtalocyanate de cuivre : portion d'hélice.

Fig. 8. — Phtalocyanate de cuivre.

Fig. 9. — Schéma du moiré par rotation.

Fig. 10. — Phtalocyanate de cuivre : les franges de moiré sont visibles dans la région délimitée par A, B, C, D où deux cristaux sont superposés.

Obtentions de moires. — Lorsque deux cristaux se superposent de manière que les lignes, projections des plans $(20\bar{1})$ forment entre elles un angle convenable 2α nous pouvons espérer obtenir des franges de moiré par rotation [5]. C'est bien ce que nous pouvons observer sur la figure 10 où $2\alpha = 21°$ et sur la figure 13, à l'endroit où les deux cristaux se chevauchent. Les franges moirées se

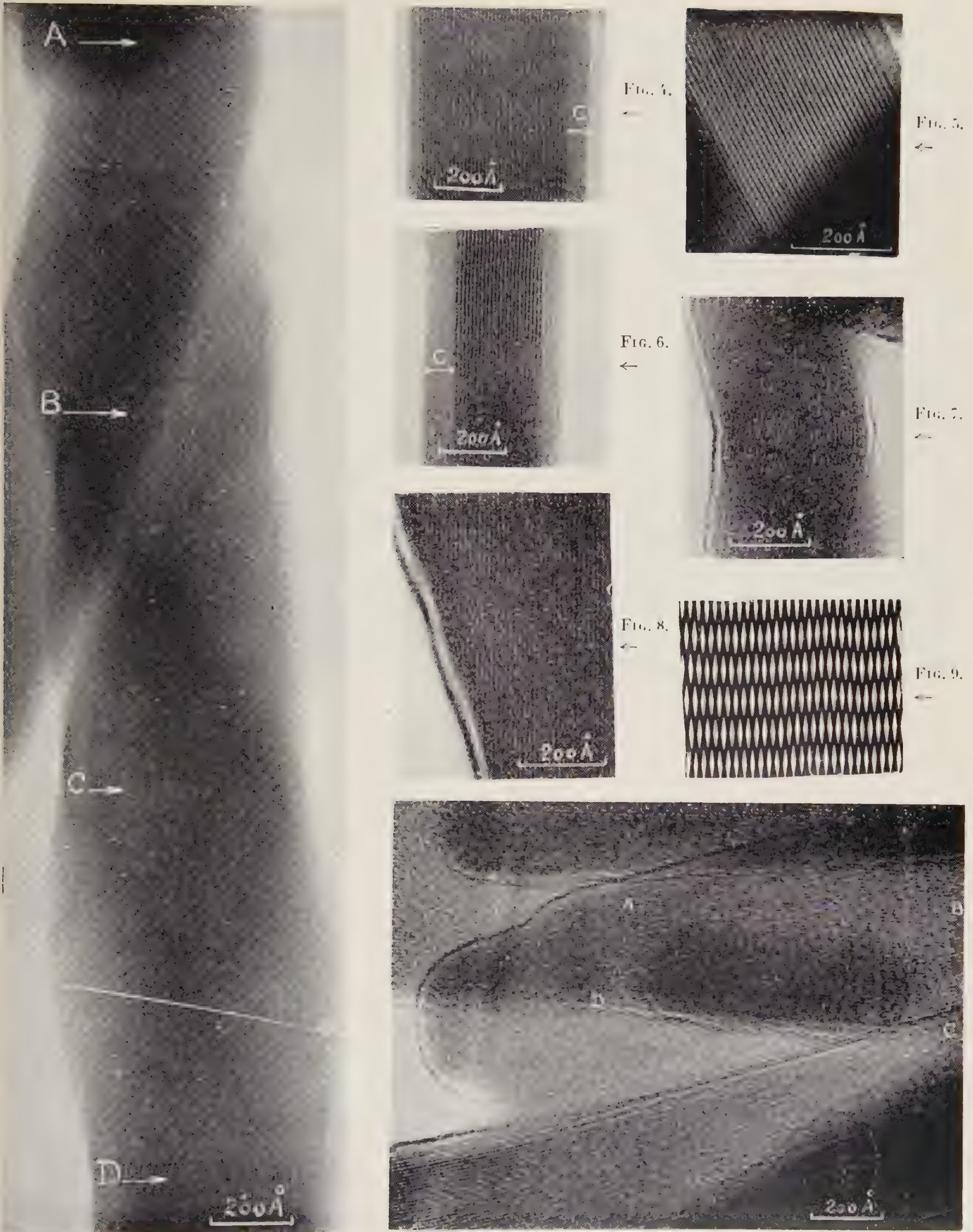

A
B
C
D
200 Å
Fig. 4.
200 Å
Fig. 5.
200 Å
Fig. 6.
C
200 Å
Fig. 7.
200 Å
Fig. 8.
200 Å
Fig. 9.
A
B
C
200 Å

Fig. 3

Fig. 10

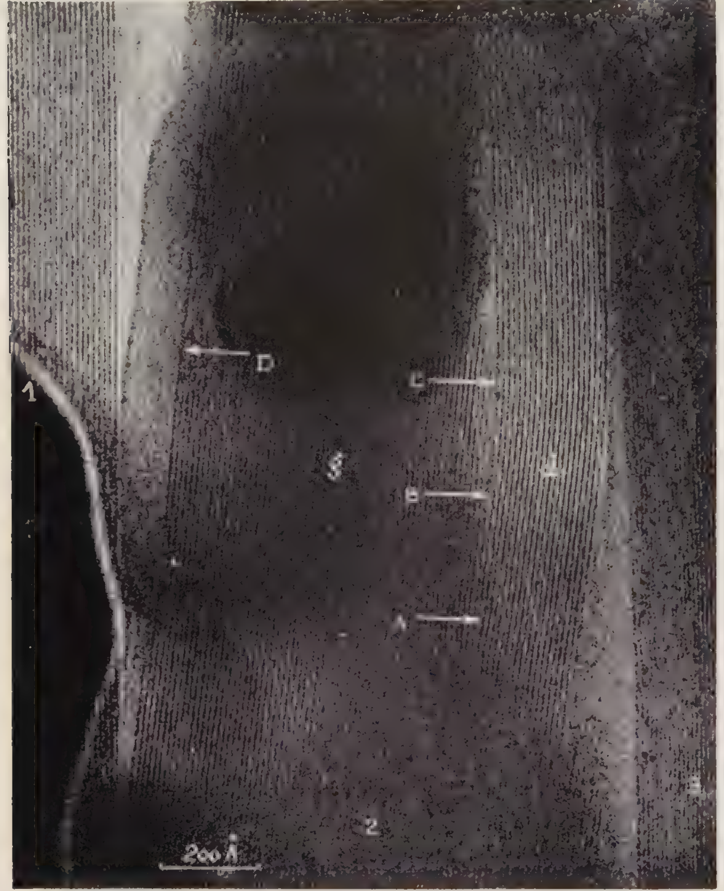


FIG. 12. — Phtalocyanate de platine.

On peut observer en A et B des dislocations de type différent.

D'autres dislocations sont visibles sur le cliché, par exemple en D ....

Note : On a intérêt, pour mieux voir les dislocations à observer la photographie obliquement, dans le sens des lignes.



FIG. 12 *bis*.
Détail des dislocations de la figure 12.

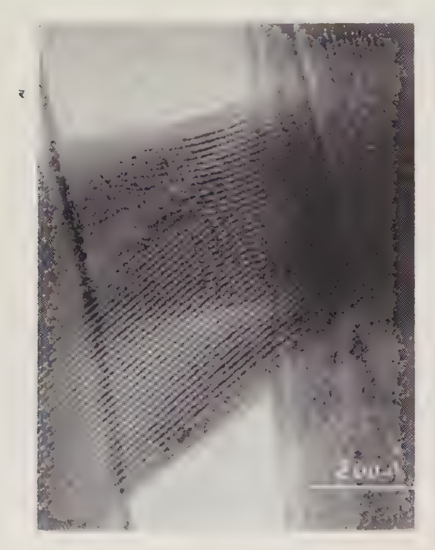


FIG. 13. — Phtalocyanate de platine : moiré.



FIG. 14. — Phtalocyanate de cuivre : surstructures.

forment, sur ce cliché, dans les mêmes conditions que sur le schéma de la figure 9. Les lignes sombres et claires y représentent les plans réticulaires et les intervalles qui les séparent. La distance entre le milieu de deux franges claires ou sombres du moiré est reliée à l'intervalle des deux lignes par la relation très simple :

$$D = \frac{d}{2 \sin \alpha}.$$

Sur la figure 10, l'angle 2α est de 21°, d est la distance réticulaire des plans $(20\bar{1})$.

$$D = 2{,}77\ d.$$

La mesure effectuée sur le cliché donne :

$$D = 2{,}90\ d.$$

Le moiré par rotation de la figure 13 est particulièrement net. Il provient de cristaux de phtalocyanate de platine sans support. Nous avons obtenu pour ce dernier composé de fréquentes figures de moiré en utilisant l'enchevêtrement des cristaux qui se produit à l'angle des carrés des grilles. Mais la formation des moirés est extrêmement délicate lorsqu'on veut voir simultanément l'image des plans réticulaires qui leur donnent naissance, car une correction d'astigmatisme des plus rigoureuses s'impose alors et une telle correction subsiste rarement au delà de une ou deux minutes d'observation.

Surstructures. — Quelques cristaux de phtalocyanate de platine et de cuivre présentent des phénomènes plus ou moins accusés de surstructure, non sur toute leur surface, mais sur des plages de dimensions variables. Dans tous les cas observés, un plan sur deux est plus accusé que ses voisins. Il semble que ce phénomène puisse être rapproché des surstructures de l'antigorite de Mandchourie observées par Brindley, Comer, Uyeda et Zussman [6], quoique dans ce minéral le phénomène se manifeste sur l'étendue entière du spécimen. Le cliché le plus contrasté que nous ayons obtenu est représenté sur la figure 14.

Après l'examen de cette série de clichés, nous sommes confirmés dans la conclusion suivante : les lignes observées sont bien la représentation des plans $(20\bar{1})$ dont elles possèdent l'écartement et la direction prévus par la théorie et les mesures des méthodes basées sur l'utilisation des rayons X. On ne peut confondre ces lignes avec les franges de moiré apparentes sur des photographies de corps clivables comme le mica ou les franges observées sur de minces cristaux d'oxyde de molybdène [7], car, dans ces deux cas, l'orientation des lignes n'est pas liée (au moins de manière apparente sur le cliché) à la géométrie du cristal sur lequel elles se manifestent.

Malheureusement nos clichés perdent de leur netteté, le plus souvent, lorsque la structure cristalline cesse d'être régulière et, par exemple, une série de dislocations est pratiquement inobservable dans ses détails. Un tel fait tient au processus même de formation de l'image. Nous observons sur un plan (celui de la plaque photographique) la projection d'un réseau à trois dimensions : l'image est « projetée » entre les plans $(20\bar{1})$ eux-mêmes et tout changement d'orientation de ces plans tendant à en modifier l'inclinaison par rapport au plan (001) et par suite, par rapport au faisceau, entraîne une déviation des électrons qui contribuent à former l'image des couches supérieures du spécimen. De là, sans doute, provient le flou constaté dans toutes les zones renfermant des dislocations multiples. Notre intérêt est donc d'utiliser des échantillons très minces. Afin d'observer le maximum de détails il serait souhaitable de pouvoir admettre au moins un spectre de diffraction supplémentaire dans la lentille-objectif. Nous devons y renoncer à cause de l'aberration de sphéricité. Cependant, de nouvelles techniques de préparations des échantillons et peut-être l'utilisation d'un porte-objet à orientation variable pourront nous conduire à de meilleurs résultats.

Je tiens à exprimer ma très vive reconnaissance à M. G. Dupouy, Directeur Général Honoraire du C. N. R. S., Directeur du Laboratoire d'Optique Électronique, dont les conseils m'ont été une aide précieuse dans l'exécution de ce travail.

Mes remerciements s'adressent également à M. le Pr G. Mathis qui a eu l'obligeance de faire préparer le Phtalocyanate de Platine dans son Laboratoire.

Manuscrit reçu le 5 octobre 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Menter (J. W.), *Proc. Roy. Soc.*, 1956, A **236**, 119-135.
[2] Robertson (J. M.), *J. Chem. Soc.*, 1940, **1**, 615-621.
[3] MM. Dargent et Durrieu, Rzepka (Mme), Films de parlodion-carbone utilisables en microscopie électronique. *C. R. Acad. Sc.*, séance du 1er avril 1959, **248**, 1962-1964.
[4] Abbe (E.), *Arch. Mikr. anat.*, 1837, **9**, 413.
[5] Voir Bouasse (H.) et Carrière (Z.), Diffraction, p. 241-248.
[6] Brindley, Comer, Uyeda et Zussman, *Acta cryst.* 1958, **II**, 99.
[7] Pernoux (E.), *Thèse*.

SUR LA PRÉSENCE ÉVENTUELLE DE BORE, DE SODIUM, DE POTASSIUM DANS LES SOURCES RADIOACTIVES α, DÉPOSÉES SUR MÉTAUX LOURDS

Par MARIE ADER,

Laboratoire de Physique Atomique et Moléculaire du Collège de France.

Résumé. — Les sources radioactives de polonium, plutonium, thorium, actinium, émettent, outre un rayonnement α, des particules plus légères que des rayons α, formant trois groupes et dont le parcours maximum s'étend à 340 μ environ dans l'émulsion photographique. Des recherches antérieures ont montré que ce rayonnement ne provient ni des éléments de l'air ambiant, ni des supports des sources, ni de contaminations par d'autres radioéléments [3] ou par l'aluminium [1]. Dans ce travail, nous avons tracé les spectres de protons obtenus par l'action des rayons α du polonium sur des composés du bore, du sodium, du potassium. Leur comparaison avec le spectre de particules de parcours anormalement long issues de la source de polonium, éliminerait l'hypothèse d'une contamination de cette source par des composés du bore, du sodium ou du potassium.

Abstract. — Radioactive sources of Po, Pu, Th and Ac emit, in addition to the α rays, three groups of particles, lighter than the α ones, and which have a maximum range of about 340 μ in photographic emulsion. Former researches showed that these light particles come neither from the gases of the ambient atmosphere, nor from the source holder, nor from contamination by other radioactive substances [3] or by Al [1].

In the present paper, we plotted the proton spectra obtained by action of α rays of Po on boron, sodium and potassium compounds. Comparison between these spectra and that of abnormally long range particles emitted by the Po source remove the hypothesis of contamination of that source by boron, sodium or potassium compounds.

Les diverses séparations chimiques aboutissant à l'isolement du produit radioactif se font dans des récipients de verre et nécessitent l'emploi de solutions acides.

Les verres sont des solides amorphes, mélanges de silicates alcalins et alcalino-terreux, renfermant éventuellement du bore, de l'aluminium, du plomb.

Les verres blancs ou verres à vitres sont des silicates doubles de sodium de potassium ou de calcium. Les verres pyrex sont caractérisés par la présence d'acide borique à la place d'oxyde de plomb.

Tous ces verres et le pyrex en particulier servent à la fabrication de verreries de laboratoire ; tous contiennent donc ces composés plus ou moins solubles en milieux acides, pouvant être entraînés lors des diverses manipulations, concentrés et précipités avec le dépôt radioactif sur le support.

Les isotopes, en quantités pondérables, susceptibles de réactions α,p, sont groupés dans le tableau p. 106.

— ^{12}C, ^{13}C, ^{16}O, ^{17}O, ^{18}O, ^{40}Ca, ou bien ne donnent pas lieu à une réaction α, p avec les rayons α de 5,2 MeV du polonium, ou bien donnent des protons de trop faible énergie pour être observables.

— ^{14}N, ^{15}N, ^{28}Si, ^{29}Si, ^{30}Si, donnent des protons dont les parcours dans l'émulsion photographique ne vont pas au-delà de 120 μ ; ces protons rentrent dans un premier groupe attribuable également à l'hydrogène [1].

^{11}B, ^{23}N, ^{39}K, ^{40}K, ^{41}K, ^{27}Al donneraient des protons dont les parcours correspondraient aux 2e et 3e groupes [2].

Une étude antérieure [1] du spectre des protons émis lors du bombardement d'une feuille mince d'aluminium par des rayons α du polonium, élimine l'hypothèse d'une contamination par l'aluminium.

— Le ^{10}B, sous l'action de particules α du polonium émettrait des protons de parcours voisin de 500 μ. Nous n'avons jamais dans nos très nombreuses mesures rencontré de traces de parcours supérieur à 340 μ environ dans l'émulsion. Si la contamination des sources radioactives provenait du bore, l'abondance du bore-10 étant environ le quart de celle du bore-11, nous aurions dû trouver, selon toute évidence, quelques protons du bore-10.

La quantité de potassium entrant dans la composition des verres ordinaires est toujours très faible ; sa présence, cependant, pourrait être responsable de protons du 2e groupe ainsi que celle du bore-11.

Les composés du sodium, sous l'action de rayons α de 5,2 MeV, émettraient des protons du 3e groupe.

Que les protons émis par ces divers éléments se groupent en raies définies telles que celles qui résultent de l'étude du Po et du Pu, paraît au premier abord surprenant. Cependant, afin de vérifier cette hypothèse, plausible avec l'aide du hasard, nous avons entrepris le tracé des spectres de protons obtenus par l'action des rayons α du polonium sur des composés du bore, du sodium et du potassium. Cette étude est analogue à celle déjà faite avec l'aluminium [1].

Travail expérimental. — Le dispositif comprend :

— Une source de polonium préparée à Harwell, déposée sur lame de platine et mesurant environ 50 millicuries au moment de l'expérience. Le support de platine est fixé sur un disque de laiton de 1 mm d'épaisseur, évidé en couronne. Des disques identiques supportent les écrans ; l'épaisseur de ces disques fait qu'il n'y a aucun contact entre la source et les écrans et par suite aucune pollution réciproque.



Fig. 1. — Le rayonnement issu de la source de Po, ralenti « face » 23 μ d'Ag et le rayonnement émis par la même source après traversée « face » chlorure de potassium, donnent la même courbe et le même nombre très approximatif de particules. Les groupes 2 et 3 sont nets, le groupe 1 a été arrêté par l'ensemble des écrans. Les parcours sont en unités arbitraires.

Sur des feuilles d'argent de 3 μ se trouvent des dépôts de borate de sodium ou de chlorure de potassium. Une deuxième feuille d'argent de 20 μ appliquée contre la première, arrête le rayonnement α et une partie des protons émis. Cet ensemble a deux côtés distincts qui sont successivement placés face à la source de polonium.

1° Côté 23 μ d'argent ; les rayons α de 5,2 MeV n'ont pas d'action sur l'argent.

2° Côté sel de borate de soude ou de chlorure de potassium, dont le bore, le sodium et le potassium, subiront les réactions α,p.

Le rayonnement traversant ces écrans dans un sens ou dans un autre est soumis au même ralentissement.

Les plaques Ilford E_1 et C_2 utilisées successivement ont été exposées dans les mêmes conditions de géométrie et de temps et ont été développées identiquement.



Fig. 2. — Cette courbe résulte de la mesure des traces de particules émises après réaction α,ρ des rayons α du Po sur l'écran « face » borate de soude. La longueur des traces s'étend beaucoup plus loin que dans le cas précédent ; il n'y a pas de groupe 3 distinct ; le nombre des traces du groupe 2 est beaucoup plus grand que dans la courbe 1. Les parcours sont en unités arbitraires.

Les mesures de longueurs de traces ont été faites dans la région des plaques, opposée à la source, région où les particules pénètrent dans l'émulsion, en incidence presque rasante.

Les courbes nombre parcours, figures 1 et 2, résultent chacune de 4 000 traces environ.

Remarques. — Les expositions de plaques photographiques E_1 et C_2 « face » 23 μ d'argent et « face » chlorure de potassium contre la source, donnent les mêmes résultats (figure 1). Le nombre des traces est très approximativement le même,

TABLEAU

Élément	Abondance isotopique (%)	Énergie du proton de la réaction α, p, avec des rayons α du P_0 de 5,2 MeV (MeV)	Longueur maximum du proton dans l'émulsion photographique (μ)
—	—	—	—
$^{10}_{5}B$	18,83	9,3	500
$^{11}_{5}B$	81,17	6,06	260
$^{12}_{6}C$	98,892	0,316	4
$^{13}_{6}C$	1,108	La réaction n'a pas lieu	
$^{14}_{7}N$	99,64	4,1	100
$^{15}_{7}N$	0,36	1,45	25
$^{16}_{8}O$	99,76	La réaction n'a pas lieu	
$^{17}_{8}O$	0,04	La réaction n'a pas lieu	
$^{18}_{8}O$	0,2	La réaction n'a pas lieu	
$^{23}_{11}Na$	100,00	7,2	300
$^{28}_{14}Si$	92,28	3,31	95
$^{19}_{24}Si$	4,67	4,03	120
$^{30}_{14}Si$	3,05	2,4	53
$^{39}_{19}K$	93,1	5,1	175
$^{40}_{19}K$	0,0119	5,2	175
$^{41}_{19}K$	6,9	6,26	200
$^{40}_{20}Ca$	96,92	0,25	2,5
$^{27}_{13}Al$	100,00	7,41	325

leur répartition est identique ; nous retrouvons les groupes déjà signalés. Il semble que la réaction des rayons α du polonium sur le potassium ait une section efficace très faible.

Les expositions de plaques E_1 et C_2, « face » 23 μ d'argent et « face » borate de soude contre la source, ont abouti aux résultats suivants ; figures 1 et 2.

— Dans un même temps d'exposition, le nombre de traces obtenues après réactions des rayons α sur le borate de soude est environ sept fois plus grand qu'avec l'écran 23 μ Ag. Donc pour obtenir le même nombre de traces, 4 000 environ, dans l'un et l'autre cas, nous avons fait sept expositions successives « face » 23 μ d'argent contre la source.

— En présence du bore, le nombre des traces courtes est beaucoup plus grand, le spectre s'étend sans apparence marquée de groupes, d'une manière continue jusqu'à 500 μ environ. Nous retrouvons ici les protons de la réaction des rayons α du polonium sur le bore 10.

Les deux courbes 1 et 2 sont trop différentes pour que les particules de parcours anormalement long émises par les sources de polonium proviennent d'une réaction α,p sur le bore ou le sodium.

Le travail technique et les mesures ont été faits en collaboration avec Marie Paule Cabannes.

Manuscrit reçu le 19 octobre 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ader (M.), *Ann. Physique*, 1957, **2**, 611-630.
[2] Ader (M.), Cabannes (M. P.) et Conte (P.), *J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 475.
[3] Ader (M.), *C. R. Acad. Sc.*, 1958, **246**, 97-98.

TABLE D'INTÉGRALES A DEUX CENTRES — II

Par JEAN BAUDET, FRANÇOISE CABARET, JACQUES TILLIEU et JEAN GUY,
Laboratoire de Physique moléculaire de la Faculté de Pharmacie de Paris et Institut de Physique de Lille.

Résumé. — Diverses intégrales à deux centres, intervenant dans l'étude des propriétés moléculaires (en particulier, dans celle des susceptibilités magnétiques), sont tabulées sous une forme condensée permettant des calculs numériques rapides.
Cette table fait suite à celle publiée dans le *Journal de Physique*, 1957, **13**, 455.

Abstract. — Some two-centre integrals occuring in the study of molecular properties (especially of magnetic susceptibilities), are tabulated in a condensed form, allowing fast numerical calculations.
This table is the continuation of a preceding one published in *Journal de Physique*, 1957, **13**, 455.

En vue de la détermination des propriétés (principalement susceptibilités magnétiques) de molécules où interviennent des électrons décrits à l'aide d'orbitales hydrogénoïdes K, L, M, N et O, nous avons eu à calculer un certain nombre de nouvelles intégrales à deux centres qui complètent celles déjà publiées [1].

Nous reprenons des notations identiques à celles utilisées dans la table précédente et les mêmes remarques d'emploi sont encore valables. Nous rappelons simplement ci-dessous les définitions essentielles :

$$J_m(\alpha, \beta, \rho) = \int f \exp(-\alpha r_1 - \beta r_2)\, d\tau \qquad (\alpha \neq \beta)$$

$$K_m(\alpha, \rho) = \int f \exp(-\alpha r_1 - \alpha r_2)\, d\tau$$

$$A_m(a) = \int_1^\infty \lambda^m e^{-a\lambda}\, d\lambda$$

$$B_m(b) = \int_{-1}^{+1} \mu^m e^{-b\mu}\, d\mu$$

$$C_m(a) = \int_1^\infty \lambda^m (\lambda^2 - 1)^{1/2} e^{-a\lambda}\, d\lambda$$

$$D_m(b) = \int_{-1}^{+1} \mu^m (1 - \mu^2)^{1/2} e^{-b\mu}\, d\mu.$$

Grâce à ces deux tables, il devient possible d'effectuer des calculs sur des éléments allant jusqu'à la cinquième période (rubidium à xénon) du tableau de Mendeleieff.

Manuscrit reçu le 27 juillet 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] TILLIEU (J.), BAUDET (J.) et GUY (J.), *J. Physique Rad.*, 1957, **13**, 455.
(Un erratum doit être signalé pour cette première table : dans l'intégrale J_{44}, il convient de lire pour le 12e terme $-A_2B_0$ et non $-A_2B_6$).

(voir les tables pp. 106 à 111)

I-N°	II-(¹)	III-Intégrales $J(\alpha, \beta, \rho)$
47	$r_1^3 r_2 \cos\theta_1 \sin\theta_1$	$\pi\rho^7/64\ (C_5D_1 + C_4D_0 - 2C_3D_3 - 2C_2D_2 + C_1D_5 + C_0D_4)$
48	$r_1^3 r_2 \cos\theta_1 \sin\theta_1 \cos\theta_2$	$\pi\rho^7/64\ (-C_5D_2 - C_4D_3 + C_3D_4 + C_3D_0 + C_2D_5 + C_2D_1 - C_1D_2 - C_0D_3)$
49	r_1^4	$\pi\rho^7/64\ (A_6B_0 + 4A_5B_1 + 5A_4B_2 - 5A_2B_4 - 4A_1B_5 - A_0B_6)$
50	$r_1^4 \sin\theta_1$	$\pi\rho^7/64\ (C_5D_0 + 3C_4D_1 + 2C_3D_2 - 2C_2D_3 - 3C_1D_4 - C_0D_5)$
51	$r_1^4 \sin^2\theta_1$	$\pi\rho^7/64\ (-A_6B_2 + A_6B_0 - 2A_5B_3 + 2A_5B_1 + A_4B_2 - A_4B_0 + 2A_3B_5 - 2A_3B_1$ $+ A_2B_6 - A_2B_4 - 2A_1B_5 + 2A_1B_3 - A_0B_6 + A_0B_4)$
52	$r_1^4 \sin^3\theta_1$	$\pi\rho^7/64\ (-C_5D_2 + C_5D_0 - C_4D_3 + C_4D_1 + C_3D_4 - C_3D_0 + C_2D_5 - C_2D_1 - C_1D_4$ $+ C_1D_2 - C_0D_5 + C_0D_3)$
53	$r_1^4 \cos\theta_1$	$\pi\rho^7/64\ (A_6B_1 + 3A_5B_2 + A_5B_0 + 2A_4B_3 + 3A_4B_1 - 2A_3B_4 + 2A_3B_2 - 3A_2B_5$ $- 2A_2B_3 - A_1B_6 - 3A_1B_4 - A_0B_5)$
54	$r_1^4 \cos\theta_1 \sin\theta_1$	$\pi\rho^7/64\ (C_5D_1 + 2C_4D_2 + C_4D_0 + 2C_3D_1 - 2C_2D_4 - C_1D_5 - 2C_1D_3 - C_0D_4)$
55	$r_1^4 \cos\theta_1 \sin^2\theta_1$	$\pi\rho^7/64\ (-A_6B_3 + A_6B_1 - A_5B_4 + A_5B_0 + A_4B_5 - A_4B_3 + A_3B_6 + A_3B_4$ $- A_3B_2 - A_3B_0 + A_2B_3 - A_2B_1 - A_1B_6 + A_1B_2 - A_0B_5 + A_0B_3)$
56	$r_1^4 \cos\theta_1 \sin^3\theta_1$	$\pi\rho^7/64\ (-C_5D_3 + C_5D_1 - C_4D_2 + C_4D_0 + C_3D_5 - C_3D_1 + C_2D_4 - C_2D_0 - C_1D_5$ $+ C_1D_3 - C_0D_4 + C_0D_2)$
57	$r_1^4 \cos^2\theta_1$	$\pi\rho^7/64\ (A_6B_2 + 2A_5B_3 + 2A_5B_1 + 4A_4B_2 + A_4B_0 - 2A_3B_5 + 2A_3B_1 - A_2B_6$ $- 4A_2B_4 - 2A_1B_5 - 2A_1B_3 - A_0B_4)$
58	$r_1^4 \cos^2\theta_1 \sin\theta_1$	$\pi\rho^7/64\ (C_5D_2 + C_4D_3 + 2C_4D_1 - C_3D_4 + 2C_3D_2 + C_3D_0 - C_2D_5 - 2C_2D_3 + C_2D_1$ $- 2C_1D_4 - C_1D_2 - C_0D_3)$
59	$r_1^4 \cos^3\theta_1$	$\pi\rho^7/64\ (A_6B_3 + A_5B_4 + 3A_5B_2 - A_4B_5 + 3A_4B_3 + 3A_4B_1 - A_3B_6 - 3A_3B_4$ $+ 3A_3B_2 + A_3B_0 - 3A_2B_5 - 3A_2B_3 + A_2B_1 - 3A_1B_4 - A_1B_2 - A_0B_3)$
60	$r_1^4 r_2 \sin\theta_1$	$\pi\rho^8/128\ (C_6D_0 + 2C_5D_1 - C_4D_2 - 4C_3D_3 - C_2D_4 + 2C_1D_5 + C_0D_6)$
61	$r_1^4 r_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2$	$\pi\rho^8/128\ (-C_6D_1 - 3C_5D_2 + C_5D_0 - 2C_4D_3 + 3C_4D_1 + 2C_3D_4 + 2C_3D_2 + 3C_2D_5$ $- 2C_2D_3 + C_1D_6 - 3C_1D_4 - C_0D_5)$
62	$r_1^4 r_2 \sin^2\theta_1$	$\pi\rho^8/128\ (-A_7B_2 + A_7B_0 - A_6B_3 + A_6B_1 + 2A_5B_4 - A_5B_2 - A_5B_0 + 2A_4B_5$ $- A_4B_3 - A_4B_1 - A_3B_6 - A_3B_4 + 2A_3B_2 - A_2B_7 - A_2B_5 + 2A_2B_3$ $+ A_1B_6 - A_1B_4 + A_0B_7 - A_0B_5)$
63	$r_1^4 r_2 \sin^2\theta_1 \cos\theta_2$	$\pi\rho^8/128\ (A_7B_3 - A_7B_1 + 2A_6B_4 - 3A_6B_2 + A_6B_0 - 3A_5B_3 + 3A_5B_1 - 2A_4B_6$ $+ 3A_4B_2 - A_4B_0 - A_3B_7 + 3A_3B_5 - 2A_3B_1 + 3A_2B_6 - 3A_2B_4$ $+ A_1B_7 - 3A_1B_5 + 2A_1B_3 - A_0B_6 + A_0B_4)$
64	$r_1^4 r_2 \cos\theta_1 \sin\theta_1$	$\pi\rho^8/128\ (C_6D_1 + C_5D_2 + C_5D_0 - 2C_4D_3 + C_4D_1 - 2C_3D_4 - 2C_3D_2 + C_2D_5$ $- 2C_2D_3 + C_1D_6 + C_1D_4 + C_0D_5)$
65	$r_1^4 r_2 \cos\theta_1 \sin\theta_1 \cos\theta_2$	$\pi\rho^8/128\ (-C_6D_2 - 2C_5D_3 + C_4D_0 + 2C_3D_5 + 2C_3D_1 + C_2D_6 - 2C_1D_3 - C_0D_4)$
66	$r_1^4 r_2 \cos\theta_1 \sin^2\theta_1$	$\pi\rho^8/128\ (-A_7B_3 + A_7B_1 - A_6B_2 + A_6B_0 + 2A_5B_5 - A_5B_3 - A_5B_1 + 2A_4B_4$ $- A_4B_2 - A_4B_0 - A_3B_7 - A_3B_5 + 2A_3B_3 - A_2B_6 - A_2B_4 + 2A_2B_2$ $+ A_1B_7 - A_1B_5 + A_0B_6 - A_0B_4)$
67	$r_1^4 r_2 \cos\theta_1 \sin^2\theta_1 \cos\theta_2$	$\pi\rho^8/128\ (A_7B_4 - A_7B_2 + A_6B_5 - A_6B_3 - A_5B_6 + A_5B_0 - A_4B_7 + A_4B_1 + A_3B_6$ $- A_3B_0 + A_2B_7 - A_2B_1 - A_1B_4 + A_1B_2 - A_0B_5 + A_0B_3)$
68	$r_1^4 r_2 \cos^2\theta_1$	$\pi\rho^8/128\ (A_7B_2 + A_6B_3 + 2A_6B_1 - 2A_5B_4 + 2A_5B_2 + A_5B_0 - 2A_4B_5 - 4A_4B_3$ $+ A_4B_1 + A_3B_6 - 4A_3B_4 - 2A_3B_2 + A_2B_7 + 2A_2B_5 - 2A_2B_3$ $+ 2A_1B_6 + A_1B_4 + A_0B_5)$
69	$r_1^4 r_2 \cos^2\theta_1 \cos\theta_2$	$\pi\rho^8/128\ (-A_7B_3 - 2A_6B_4 - A_6B_2 - 2A_5B_3 + A_5B_1 + 2A_4B_6 + 2A_4B_2 + A_4B_0$ $+ A_3B_7 + 2A_3B_5 + 2A_3B_1 + A_2B_6 - 2A_2B_4 - A_1B_5 - 2A_1B_3$ $- A_0B_4$
70	$r_1^4 r_2 \cos^3\theta_1$	$\pi\rho^8/128\ (A_7B_3 + 3A_6B_2 - 2A_5B_5 + 3A_5B_1 - 6A_4B_4 + A_4B_0 + A_3B_7 - 6A_3B_3$ $+ 3A_2B_6 - 2A_2B_2 + 3A_1B_5 + A_0B_4)$
71	$r_1^4 r_2 \cos^3\theta_1 \cos\theta_2$	$\pi\rho^8/128\ (-A_7B_4 - A_6B_5 - 2A_6B_3 + A_5B_6 - 2A_5B_4 + A_4B_7 + 2A_4B_5 + 2A_4B_1$ $+ 2A_3B_6 + 2A_3B_2 + A_3B_0 - 2A_2B_3 + A_2B_1 - 2A_1B_4 - A_1B_2$ $- A_0B_3)$
72	$r_1^4 r_2^4$	$\pi\rho^{11}/1024\ (A_{10}B_0 - 5A_8B_2 + 10A_6B_4 - 10A_4B_6 + 5A_2B_8 - A_0B_{10})$
73	$r_1^4 r_2^4 \cos\theta_2$	$\pi\rho^{11}/1024\ (-A_{10}B_1 - A_9B_2 + A_9B_0 + 4A_8B_3 + A_8B_1 + 4A_7B_4 - 4A_7B_2 - 6A_6B_5$ $- 4A_6B_3 - 6A_5B_6 + 6A_5B_4 + 4A_4B_7 + 6A_4B_5 + 4A_3B_8 - 4A_3B_6$ $- A_2B_9 - 4A_2B_7 - A_1B_{10} + A_1B_8 + A_0B_9)$
74	$r_1^4 r_2^4 \cos\theta_1$	$\pi\rho^{11}/1024\ (A_{10}B_1 - A_9B_2 + A_9B_0 - 4A_8B_3 - A_8B_1 + 4A_7B_4 - 4A_7B_2 + 6A_6B_5$ $+ 4A_6B_3 - 6A_5B_6 + 6A_5B_4 - 4A_4B_7 - 6A_4B_5 + 4A_3B_8 - 4A_3B_6$ $+ A_2B_9 + 4A_2B_7 - A_1B_{10} + A_1B_8 - A_0B_9)$
75	$r_1^4 r_2^4 \cos\theta_1 \cos\theta_2$	$\pi\rho^{11}/1024\ (-A_{10}B_2 + 4A_8B_4 + A_8B_0 - 6A_6B_6 - 4A_6B_2 + 4A_4B_8 + 6A_4B_4$ $- A_2B_{10} - 4A_2B_6 + A_0B_8)$

IV-Intégrales $K(\alpha, \rho)$
(calculées sur un demi-espace)

	V [2]
$\pi\rho^7/64\ (1/3\ C_5 + \pi/4\ C_4 - 4/15\ C_3 - \pi/8\ C_2 + 8/105\ C_1 + \pi/32\ C_0)$	P
$\pi\rho^7/64\ (-\pi/16\ C_5 - 2/15\ C_4 + 9\pi/32\ C_3 + 43/105\ C_2 - \pi/16\ C_1 - 2/15\ C_0)$	I
$\pi\rho^7/64\ (A_6 + 2A_5 + 5/3\ A_4 - A_2 - 2/3\ A_1 - 1/7\ A_0)$	P
$\pi\rho^7/64\ (\pi/4\ C_5 + C_4 + \pi/8\ C_3 - 4/15\ C_2 - 3\pi/32\ C_1 - 8/105\ C_0)$	I
$\pi\rho^7/64\ (2/3\ A_6 + 1/2\ A_5 - 2/3\ A_4 - 2/3\ A_3 - 2/35\ A_2 + 1/6\ A_1 + 2/35\ A_0)$	P
$\pi\rho^7/64\ (3\pi/16\ C_5 + 1/5\ C_4 - 7\pi/32\ C_3 - 9/35\ C_2 + \pi/32\ C_1 + 2/35\ C_0)$	I
$\pi\rho^7/64\ (1/2\ A_6 + 2A_5 + 2A_4 + 4/15\ A_3 - A_2 - 26/35\ A_1 - 1/6\ A_0)$	I
$\pi\rho^7/64\ (1/3\ C_5 + 3\pi/8\ C_4 + 2/3\ C_3 - \pi/16\ C_2 - 12/35\ C_1 - \pi/32\ C_0)$	P
$\pi\rho^7/64\ (1/4\ A_6 + 4/5\ A_5 - 1/12\ A_4 - 104/105\ A_3 - 1/4\ A_2 + 4/21\ A_1 + 1/12\ A_0)$	I
$\pi\rho^7/64\ (1/5\ C_5 + 3\pi/16\ C_4 - 9/35\ C_3 - 7\pi/32\ C_2 + 2/35\ C_1 + \pi/32\ C_0)$	P
$\pi\rho^7/64\ (1/3\ A_6 + 3/2\ A_5 + 7/3\ A_4 + 2/3\ A_3 - 33/35\ A_2 - 5/6\ A_1 - 1/5\ A_0)$	P
$\pi\rho^7/64\ (\pi/16\ C_5 + 4/5\ C_4 + 11\pi/32\ C_3 - 1/105\ C_2 - \pi/8\ C_1 - 2/15\ C_0)$	I
$\pi\rho^7/64\ (1/4\ A_6 + 6/5\ A_5 + 25/12\ A_4 + 44/35\ A_3 - 3/4\ A_2 - 14/15\ A_1 - 1/4\ A_0)$	I
$\pi\rho^8/128\ (\pi/4\ C_6 + 2/3\ C_5 - \pi/16\ C_4 - 8/15\ C_3 - \pi/32\ C_2 + 16/105\ C_1 + 5\pi/256\ C_0)$	P
$\pi\rho^8/128\ (-1/3\ C_6 + \pi/16\ C_5 + 11/15\ C_4 + 3\pi/16\ C_3 - 4/105\ C_2 - 19\pi/256\ C_1 - 8/105\ C_0)$	I
$\pi\rho^8/128\ (2/3\ A_7 + 1/4\ A_6 - 14/15\ A_5 - 5/12\ A_4 + 34/105\ A_3 + 5/24\ A_2 - 2/35\ A_1 - 1/24\ A_0)$	I
$\pi\rho^8/128\ (-1/4\ A_7 + 2/5\ A_6 + 3/4\ A_5 - 2/7\ A_4 - 5/8\ A_3 - 6/35\ A_2 + 1/8\ A_1 + 2/35\ A_0)$	P
$\pi\rho^8/128\ (1/3\ C_6 + 5\pi/16\ C_5 + 1/15\ C_4 - 3\pi/16\ C_3 - 4/21\ C_2 + 13\pi/256\ C_1 + 8/105\ C_0)$	I
$\pi\rho^8/128\ (-\pi/16\ C_6 - 4/15\ C_5 + \pi/4\ C_4 + 86/105\ C_3 + 5\pi/256\ C_2 - 4/15\ C_1 - \pi/32\ C_0)$	P
$\pi\rho^8/128\ (1/4\ A_7 + 2/3\ A_6 - 5/12\ A_5 - 14/15\ A_4 + 5/24\ A_3 + 34/105\ A_2 - 1/24\ A_1 - 2/35\ A_0)$	P
$\pi\rho^8/128\ (-2/15\ A_7 - 1/12\ A_6 + 6/7\ A_5 + 3/8\ A_4 - 6/7\ A_3 - 3/8\ A_2 + 2/15\ A_1 + 1/12\ A_0)$	I
$\pi\rho^8/128\ (1/3\ A_7 + 5/4\ A_6 + 19/15\ A_5 - 5/6\ A_4 - 139/105\ A_3 - 1/24\ A_2 + 17/35\ A_1 + 1/6\ A_0)$	I
$\pi\rho^8/128\ (-1/4\ A_7 - 11/15\ A_6 + 41/21\ A_4 + 35/24\ A_3 - 9/35\ A_2 - 2/3\ A_1 - 1/5\ A_0)$	P
$\pi\rho^8/128\ (1/4\ A_7 + A_6 + 7/6\ A_5 - 1/5\ A_4 - 11/8\ A_3 - 5/21\ A_2 + 1/2\ A_1 + 1/5\ A_0)$	P
$\pi\rho^8/128\ (-1/5\ A_7 - 2/3\ A_6 - 9/35\ A_5 + 35/24\ A_4 + 41/21\ A_3 - 11/15\ A_1 - 1/4\ A_0)$	I
$\pi\rho^{11}/1024\ (A_{10} - 5/3\ A_8 + 2A_6 - 10/7\ A_4 + 5/9\ A_2 - 1/11\ A_0)$	P
$\pi\rho^{11}/1024\ (-1/2\ A_{10} + 2/3\ A_9 + 3/2\ A_8 - 8/15\ A_7 - 2A_6 + 12/35\ A_5 + 3/2\ A_4 - 8/63\ A_3 - 3/5\ A_2 + 2/99\ A_1 + 1/10\ A_0)$	I
$\pi\rho^{11}/1024\ (1/2\ A_{10} + 2/3\ A_9 - 3/2\ A_8 - 8/15\ A_7 + 2A_6 + 12/35\ A_5 - 3/2\ A_4 - 8/63\ A_3 + 3/5\ A_2 + 2/99\ A_1 - 1/10\ A_0)$	I
$\pi\rho^{11}/1024\ (-1/3\ A_{10} + 9/5\ A_8 - 46/21\ A_6 + 74/45\ A_4 - 51/77\ A_2 + 1/9\ A_0)$	P

I N°	II (¹)	III Intégrales $J(\alpha, \beta, \gamma)$ (*suite*)
76	$r_1^5 \sin^2 \theta_1$	$\pi\rho^8/128\ (- A_7B_2 + A_7B_0 - 3A_6B_3 + 3A_6B_1 - 2A_5B_4 + 3A_5B_2 - A_5B_0 + 2A_4B_5 + A_4B_3 - 3A_4B_1 + 3A_3B_6 - A_3B_4 - 2A_3B_2 + A_2B_7 - 3A_2B_5 + 2A_2B_3 - 3A_1B_6 + 3A_1B_4 - A_0B_7 + A_0B_5)$
77	$r_1^5 \cos \theta_1 \sin^2 \theta_1$	$\pi\rho^8/128\ (- A_7B_3 + A_7B_1 - 2A_6B_4 + A_6B_2 + A_6B_0 - A_5B_3 + A_5B_1 + 2A_4B_6 - A_4B_2 - A_4B_0 + A_3B_7 + A_3B_5 - 2A_3B_1 - A_2B_6 + A_2B_4 - A_1B_7 - A_1B_5 + 2A_1B_3 - A_0B_6 + A_0B_4)$
78	$r_1 \cos^2 \theta_1$	$\pi\rho^8/128\ (A_7B_2 + 3A_6B_3 + 2A_6B_1 + 2A_5B_4 + 6A_5B_2 + A_5B_0 - 2A_4B_5 + 4A_4B_3 + 3A_4B_1 - 3A_3B_6 - 4A_3B_4 + 2A_3B_2 - A_2B_7 - 6A_2B_5 - 2A_2B_3 - 2A_1B_6 - 3A_1B_4 - A_0B_5)$
79	$r_1^5 \cos^3 \theta_1$	$\pi\rho^8/128\ (A_7B_3 + 2A_6B_4 + 3A_6B_2 + 6A_5B_3 + 3A_5B_1 - 2A_4B_6 + 6A_4B_2 + A_4B_0 - A_3B_7 - 6A_3B_5 + 2A_3B_1 - 3A_2B_6 - 6A_2B_4 - 3A_1B_5 - 2A_1B_3 - A_0B_4)$
80	$r_1^5 r_2 \sin^2 \theta_1$	$\pi\rho^9/256\ (- A_8B_2 + A_8B_0 - 2A_7B_3 + 2A_7B_1 + A_6B_4 - A_6B_0 + 4A_5B_5 - 2A_5B_3 - 2A_5B_1 + A_4B_6 - 2A_4B_4 + A_4B_2 - 2A_3B_7 - 2A_3B_5 + 4A_3B_3 - A_2B_8 + A_2B_4 + 2A_1B_7 - 2A_1B_5 + A_0B_8 - A_0B_6)$
81	$r_1^5 r_2 \sin^2 \theta_1 \cos \theta_2$	$\pi\rho^9/256\ (A_8B_3 - A_8B_1 + 3A_7B_4 - 4A_7B_2 + A_7B_0 + 2A_6B_5 - 6A_6B_3 + 4A_6B_1 - 2A_5B_6 - 3A_5B_4 + 6A_5B_2 - A_5B_0 - 3A_4B_7 + 3A_4B_5 + 3A_4B_3 - 3A_4B_1 - A_3B_8 + 6A_3B_6 - 3A_3B_4 - 2A_3B_2 + 4A_2B_7 - 6A_2B_5 + 2A_2B_3 + A_1B_8 - 4A_1B_6 + 3A_1B_4 - A_0B_7 + A_0B_5)$
82	$r_1^5 r_2 \cos \theta_1 \sin^2 \theta_1$	$\pi\rho^9/256\ (- A_8B_3 + A_8B_1 - A_7B_4 + A_7B_0 + 2A_6B_5 - 2A_6B_3 + 2A_5B_6 + A_5B_4 - 2A_5B_2 - A_5B_0 - A_4B_7 + A_4B_5 + A_4B_3 - A_4B_1 - A_3B_8 - 2A_3B_6 + A_3B_4 + 2A_3B_2 - 2A_2B_5 + 2A_2B_3 + A_1B_8 - A_1B_4 + A_0B_7 - A_0B_5)$
83	$r_1^5 r_2 \cos \theta_1 \sin^2 \theta_1 \cos \theta_2$	$\pi\rho^9/256\ (A_8B_4 - A_8B_2 + 2A_7B_5 - 2A_7B_3 - A_6B_4 + A_6B_0 - 2A_5B_7 + 2A_5B_1 - A_4B_8 + A_4B_6 + A_4B_2 - A_4B_0 + 2A_3B_7 - 2A_3B_1 + A_2B_8 - A_2B_4 - 2A_1B_5 + 2A_1B_3 - A_0B_6 + A_0B_4)$
84	$r_1^5 r_2 \cos^2 \theta_1$	$\pi\rho^9/256\ (A_8B_2 + 2A_7B_3 + 2A_7B_1 - A_6B_4 + 4A_6B_2 + A_6B_0 - 4A_5B_5 - 2A_5B_3 + 2A_5B_1 - A_4B_6 - 8A_4B_4 - A_4B_2 + 2A_3B_7 - 2A_3B_5 - 4A_3B_3 + A_2B_8 + 4A_2B_6 - A_2B_4 + 2A_1B_7 + 2A_1B_5 + A_0B_6)$
85	$r_1^5 r_2 \cos^2 \theta_1 \cos \theta_2$	$\pi\rho^9/256\ (- A_8B_3 - 3A_7B_4 - A_7B_2 - 2A_6B_5 - 3A_6B_3 + A_6B_1 + 2A_5B_6 - 2A_5B_4 + 3A_5B_2 + A_5B_0 + 3A_4B_7 + 2A_4B_5 + 2A_4B_3 + 3A_4B_1 + A_3B_8 + 3A_3B_6 - 2A_3B_4 + 2A_3B_2 + A_2B_7 - 3A_2B_5 - 2A_2B_3 - A_1B_6 - 3A_1B_4 - A_0B_5)$
86	$r_1^5 r_2 \cos^3 \theta_1$	$\pi\rho^9/256\ (A_8B_3 + A_7B_4 + 3A_7B_2 - 2A_6B_5 + 3A_6B_3 + 3A_6B_1 - 2A_5B_6 - 6A_5B_4 + 3A_5B_2 + A_5B_0 + A_4B_7 - 6A_4B_5 - 6A_4B_3 + A_4B_1 + A_3B_8 + 3A_3B_6 - 6A_3B_4 - 2A_3B_2 + 3A_2B_7 + 3A_2B_5 - 2A_2B_3 + 3A_1B_6 + A_1B_4 + A_0B_5)$
87	$r_1^5 r_2 \cos^3 \theta_1 \cos \theta_2$	$\pi\rho^9/256\ (- A_8B_4 - 2A_7B_5 - 2A_7B_3 - 4A_6B_4 + 2A_5B_7 + 2A_5B_1 + A_4B_8 + 4A_4B_6 + 4A_4B_2 + A_4B_0 + 2A_3B_7 + 2A_3B_1 - 4A_2B_4 - 2A_1B_5 - 2A_1B_3 - A_0B_4)$
88	$r_1^5 r_2^4 \cos \theta_1$	$\pi\rho^{12}/2048\ (A_{11}B_1 + A_{10}B_0 - 5A_9B_3 - 5A_8B_2 + 10A_7B_5 + 10A_6B_4 - 10A_5B_7 - 10A_4B_6 + 5A_3B_9 + 5A_2B_8 - A_1B_{11} - A_0B_{10})$
89	$r_1^6 r_2 \sin^2 \theta_1$	$\pi\rho^{10}/512\ (- A_9B_2 + A_9B_0 - 3A_8B_3 + 3A_8B_1 - A_7B_4 + 2A_7B_2 - A_7B_0 + 5A_6B_5 - 2A_6B_3 - 3A_6B_1 + 5A_5B_6 - 4A_5B_4 - A_5B_2 - A_4B_7 - 4A_4B_5 + 5A_4B_3 - 3A_3B_8 - 2A_3B_6 + 5A_3B_4 - A_2B_9 + 2A_2B_7 - A_2B_5 + 3A_1B_8 - 3A_1B_6 + A_0B_9 - A_0B_7)$
90	$r_1^6 r_2 \sin^2 \theta_1 \cos \theta_2$	$\pi\rho^{10}/512\ (A_9B_3 - A_9B_1 + 4A_8B_4 - 5A_8B_2 + A_8B_0 + 5A_7B_5 - 10A_7B_3 + 5A_7B_1 - 9A_6B_4 + 10A_6B_2 - A_6B_0 - 5A_5B_7 + 9A_5B_3 - 4A_5B_1 - 4A_4B_8 + 9A_4B_6 - 5A_4B_2 - A_3B_9 + 10A_3B_7 - 9A_3B_5 + 5A_2B_8 - 10A_2B_6 + 5A_2B_4 + A_1B_9 - 5A_1B_7 + 4A_1B_5 - A_0B_8 + A_0B_6)$
91	$r_1^6 r_2 \cos \theta_1 \sin^2 \theta_1$	$\pi\rho^{10}/512\ (- A_9B_3 + A_9B_1 - 2A_8B_4 + A_8B_2 + A_8B_0 + A_7B_5 - 2A_7B_3 + A_7B_1 + 4A_6B_6 - A_6B_4 - 2A_6B_2 - A_6B_0 + A_5B_7 + 2A_5B_5 - A_5B_3 - 2A_5B_1 - 2A_4B_8 - A_4B_6 + 2A_4B_4 + A_4B_2 - A_3B_9 - 2A_3B_7 - A_3B_5 + 4A_3B_3 + A_2B_8 - 2A_2B_6 + A_2B_4 + A_1B_9 + A_1B_7 - 2A_1B_5 + A_0B_8 - A_0B_6)$
92	$r_1^6 r_2 \cos \theta_1 \sin^2 \theta_1 \cos \theta_2$	$\pi\rho^{10}/512\ (A_9B_4 - A_9B_2 + 3A_8B_5 - 3A_8B_3 + 2A_7B_6 - 3A_7B_4 + A_7B_0 - 2A_6B_7 + A_6B_5 + 3A_6B_1 - 3A_5B_8 + A_5B_6 + 3A_5B_2 - A_5B_0 - A_4B_9 + 3A_4B_7 + A_4B_3 - 3A_4B_1 + 3A_3B_8 - A_3B_4 - 2A_3B_2 + A_2B_9 - 3A_2B_5 + 2A_2B_3 - 3A_1B_6 + 3A_1B_4 - A_0B_7 + A_0B_5)$

IV-Intégrales $K(\alpha, \rho)$
(calculées sur un demi-espace)

	V [2]
$\pi\rho^8/128\,(2/3\,A_7 + 3/4\,A_6 - 2/5\,A_5 - 11/12\,A_4 - 46/105\,A_3 + 1/8\,A_2 + 6/35\,A_1 + 1/24\,A_0)$	I
$\pi\rho^8/128\,(1/4\,A_7 + 14/15\,A_6 + 1/4\,A_5 - 22/21\,A_4 - 17/24\,A_3 + 2/35\,A_2 + 5/24\,A_1 + 2/35\,A_0)$	P
$\pi\rho^8/128\,(1/3\,A_7 + 7/4\,A_6 + 17/5\,A_5 + 13/6\,A_4 - 59/105\,A_3 - 13/8\,A_2 - 31/35\,A_1 - 1/6\,A_0)$	I
$\pi\rho^8/128\,(1/4\,A_7 + 7/5\,A_6 + 3A_5 + 19/7\,A_4 - 1/8\,A_3 - 57/35\,A_2 - A_1 - 1/5\,A_0)$	P
$\pi\rho^9/256\,(2/3\,A_8 + 1/2\,A_7 - 4/5\,A_6 - 5/6\,A_5 + 8/105\,A_4 + 5/12\,A_3 + 4/45\,A_2 - 1/12\,A_1 - 2/63\,A_0)$	P
$\pi\rho^9/256\,(-1/4\,A_8 + 4/15\,A_7 + 5/6\,A_6 + 4/35\,A_5 - 5/8\,A_4 - 164/315\,A_3 + 44/315\,A_1 + 1/24\,A_0)$	I
$\pi\rho^9/256\,(1/4\,A_8 + 4/5\,A_7 - 1/6\,A_6 - 124/105\,A_5 - 5/24\,A_4 + 148/315\,A_3 + 1/6\,A_2 - 4/45\,A_1 - 1/24\,A_0)$	I
$\pi\rho^9/256\,(-2/15\,A_8 - 1/6\,A_7 + 4/5\,A_6 + 3/4\,A_5 - 40/63\,A_4 - 3/4\,A_3 - 4/45\,A_2 + 1/6\,A_1 + 2/35\,A_0)$	P
$\pi\rho^9/256\,(1/3\,A_8 + 3/2\,A_7 + 32/15\,A_6 - 1/6\,A_5 - 218/105\,A_4 - 13/12\,A_3 + 152/315\,A_2 + 7/12\,A_1 + 1/7\,A_0)$	P
$\pi\rho^9/256\,(-1/4\,A_8 - 14/15\,A_7 - 7/12\,A_6 + 66/35\,A_5 + 65/24\,A_4 + 254/315\,A_3 - 7/8\,A_2 - 26/35\,A_1 - 1/6\,A_0)$	I
$\pi\rho^9/256\,(1/4\,A_8 + 6/5\,A_7 + 23/12\,A_6 + 18/35\,A_5 - 15/8\,A_4 - 418/315\,A_3 + 3/8\,A_2 + 22/35\,A_1 + 1/6\,A_0)$	I
$\pi\rho^9/256\,(-1/5\,A_8 - 5/6\,A_7 - 4/5\,A_6 + 5/4\,A_5 + 190/63\,A_4 + 5/4\,A_3 - 4/5\,A_2 - 5/6\,A_1 - 1/5\,A_0)$	P
$\pi\rho^{12}/2048\,(1/2\,A_{11} + A_{10} - 5/4\,A_9 - 5/3\,A_8 + 5/3\,A_7 + 2A_6 - 5/4\,A_5 - 10/7\,A_4 + 1/2\,A_3 + 5/9\,A_2 - 1/12\,A_1 - 1/11\,A_0)$	P
$\pi\rho^{10}/512\,(2/3\,A_9 + 3/4\,A_8 - 8/15\,A_7 - 7/6\,A_6 - 44/105\,A_5 + 11/24\,A_4 + 8/21\,A_3 - 1/60\,A_2 - 2/21\,A_1 - 1/40\,A_0)$	I
$\pi\rho^{10}/512\,(-1/4\,A_9 + 2/15\,A_8 + 5/6\,A_7 + 8/15\,A_6 - 3/8\,A_5 - 52/63\,A_4 - 7/20\,A_3 + 8/63\,A_2 + 17/120\,A_1 + 2/63\,A_0)$	P
$\pi\rho^{10}/512\,(1/4\,A_9 + 14/15\,A_8 + 1/6\,A_7 - 136/105\,A_6 - 19/24\,A_5 + 116/315\,A_4 + 29/60\,A_3 + 8/315\,A_2 - 13/120\,A_1 - 2/63\,A_0)$	P
$\pi\rho^{10}/512\,(-2/15\,A_9 - 1/4\,A_8 + 24/35\,A_7 + 13/12\,A_6 - 4/21\,A_5 - 39/40\,A_4 - 8/15\,A_3 + 1/10\,A_2 + 6/35\,A_1 + 1/24\,A_0)$	I

I-N°	II-(1)	III-Intégrales $J(\alpha, \beta, \rho)$ (*suite*)
93	$r_1^6 r_2 \cos^2 \theta_1$	$\pi\rho^{10}/512\ (A_9B_2 + 3A_8B_3 + 2A_8B_1 + A_7B_4 + 6A_7B_2 + A_7B_0 - 5A_6B_5 + 2A_6B_3 + 3A_6B_1 - 5A_5B_6 - 10A_5B_4 + A_5B_2 + A_4B_7 - 10A_4B_5 - 5A_4B_3 + 3A_3B_8 + 2A_3B_6 - 5A_3B_4 + A_2B_9 + 6A_2B_7 + A_2B_5 + 2A_1B_8 + 3A_1B_6 + A_0B_7)$
94	$r_1^6 r_2 \cos^2 \theta_1 \cos \theta_2$	$\pi\rho^{10}/512\ (- A_9B_3 - 4A_8B_4 - A_8B_2 - 5A_7B_5 - 4A_7B_3 + A_7B_1 - 5A_6B_4 + 4A_6B_2 + A_6B_0 + 5A_5B_7 + 5A_5B_3 + 4A_5B_1 + 4A_4B_8 + 5A_4B_6 + 5A_4B_2 + A_3B_9 + 4A_3B_7 - 5A_3B_5 + A_2B_8 - 4A_2B_6 - 5A_2B_4 - A_1B_7 - 4A_1B_5 - A_0B_6)$
95	$r_1^6 r_2 \cos^3 \theta_1$	$\pi\rho^{10}/512\ (A_9B_3 + 2A_8B_4 + 3A_8B_2 - A_7B_5 + 6A_7B_3 + 3A_7B_1 - 4A_6B_6 - 3A_6B_4 + 6A_6B_2 + A_6B_0 - A_5B_7 - 12A_5B_5 - 3A_5B_3 + 2A_5B_1 + 2A_4B_8 - 3A_4B_6 - 12A_4B_4 - A_4B_2 + A_3B_9 + 6A_3B_7 - 3A_3B_5 - 4A_3B_3 + 3A_2B_8 + 6A_2B_6 - A_2B_4 + 3A_1B_7 + 2A_1B_5 + A_0B_6)$
96	$r_1^6 r_2 \cos^3 \theta_1 \cos \theta_2$	$\pi\rho^{10}/512\ (- A_9B_4 - 3A_8B_5 - 2A_8B_3 - 2A_7B_6 - 6A_7B_4 + 2A_6B_7 - 4A_6B_5 + 2A_6B_1 + 3A_5B_8 + 4A_5B_6 + 6A_5B_2 + A_5B_0 + A_4B_9 + 6A_4B_7 + 4A_4B_3 + 3A_4B_1 + 2A_3B_8 - 4A_3B_4 + 2A_3B_2 - 6A_2B_5 - 2A_2B_3 - 2A_1B_6 - 3A_1B_4 - A_0B_5)$
97	$r_1^6 r_2^4 \sin^2 \theta_1$	$\pi\rho^{13}/4096\ (- A_{12}B_2 + A_{12}B_0 + 5A_{10}B_4 - 4A_{10}B_2 - A_{10}B_0 - 10A_8B_6 + 5A_8B_4 + 5A_8B_2 + 10A_6B_8 - 10A_6B_4 - 5A_4B_{10} - 5A_4B_8 + 10A_4B_6 + A_2B_{12} + 4A_2B_{10} - 5A_2B_8 - A_0B_{12} + A_0B_{10})$
98	$r_1^6 r_2^4 \cos \theta_1 \sin^2 \theta_1$	$\pi\rho^{13}/4096\ (- A_{12}B_3 + A_{12}B_1 + A_{11}B_4 - 2A_{11}B_2 + A_{11}B_0 + 4A_{10}B_5 - 2A_{10}B_3 - 2A_{10}B_1 - 4A_9B_6 + 7A_9B_4 - 2A_9B_2 - A_9B_0 - 6A_8B_7 - 2A_8B_5 + 7A_8B_3 + A_8B_1 + 6A_7B_8 - 8A_7B_6 - 2A_7B_4 + 4A_7B_2 + 4A_6B_9 + 8A_6B_7 - 8A_6B_5 - 4A_6B_3 - 4A_5B_{10} + 2A_5B_8 + 8A_5B_6 - 6A_5B_4 - A_4B_{11} - 7A_4B_9 + 2A_4B_7 + 6A_4B_5 + A_3B_{12} + 2A_3B_{10} - 7A_3B_8 + 4A_3B_6 + 2A_2B_{11} + 2A_2B_9 - 4A_2B_7 - A_1B_{12} + 2A_1B_{10} - A_1B_8 - A_0B_{11} + A_0B_9)$
99	$r_1^6 r_2^4 \cos \theta_1 \sin^2 \theta_1 \cos \theta_2$	$\pi\rho^{13}/4096\ (A_{12}B_4 - A_{12}B_2 - 4A_{10}B_6 + 3A_{10}B_4 + A_{10}B_0 + 6A_8B_8 - 2A_8B_6 - 3A_8B_2 - A_8B_0 - 4A_6B_{10} - 2A_6B_8 + 2A_6B_4 + 4A_6B_2 + A_4B_{12} + 3A_4B_{10} + 2A_4B_6 - 6A_4B_4 - A_2B_{12} - 3A_2B_8 + 4A_2B_6 + A_0B_{10} - A_0B_8)$
100	$r_1^6 r_2^6 \cos^2 \theta_1$	$\pi\rho^{13}/4096\ (A_{12}B_2 + 2A_{11}B_1 - 5A_{10}B_4 + A_{10}B_0 - 10A_9B_3 + 10A_8B_6 - 5A_8B_2 + 20A_7B_5 - 10A_6B_8 + 10A_6B_4 - 20A_5B_7 + 5A_4B_{10} - 10A_4B_6 + 10A_3B_9 - A_2B_{12} + 5A_2B_8 - 2A_1B_{11} - A_0B_{10})$
101	$r_1^6 r_2^4 \cos^2 \theta_1 \cos \theta_2$	$\pi\rho^{13}/4096\ (- A_{12}B_3 - A_{11}B_4 - A_{11}B_2 + 4A_{10}B_5 - A_{10}B_3 + A_{10}B_1 + 4A_9B_6 + 4A_9B_4 + A_9B_2 + A_9B_0 - 6A_8B_7 + 4A_8B_5 - 4A_8B_3 + A_8B_1 - 6A_7B_8 - 6A_7B_6 - 4A_7B_4 - 4A_7B_2 + 4A_6B_9 - 6A_6B_7 + 6A_6B_5 - 4A_6B_3 + 4A_5B_{10} + 4A_5B_8 + 6A_5B_6 + 6A_5B_4 - A_4B_{11} + 4A_4B_9 - 4A_4B_7 + 6A_4B_5 - A_3B_{12} - A_3B_{10} - 4A_3B_8 - 4A_3B_6 - A_2B_{11} + A_2B_9 - 4A_2B_7 + A_1B_{10} + A_1B_8 + A_0B_9)$
102	$r_1^6 r_2^4 \cos^3 \theta_1$	$\pi\rho^{13}/4096\ (A_{12}B_3 - A_{11}B_4 + 3A_{11}B_2 - 4A_{10}B_5 - 3A_{10}B_3 + 3A_{10}B_1 + 4A_9B_6 - 12A_9B_4 - 3A_9B_2 + A_9B_0 + 6A_8B_7 + 12A_8B_5 - 12A_8B_3 - A_8B_1 - 6A_7B_8 + 18A_7B_6 + 12A_7B_4 - 4A_7B_2 - 4A_6B_9 - 18A_6B_7 + 18A_6B_5 + 4A_6B_3 + 4A_5B_{10} - 12A_5B_8 - 18A_5B_6 + 6A_5B_4 + A_4B_{11} + 12A_4B_9 - 12A_4B_7 - 6A_4B_5 - A_3B_{12} + 3A_3B_{10} + 12A_3B_8 - 4A_3B_6 - 3A_2B_{11} + 3A_2B_9 + 4A_2B_7 - 3A_1B_{10} + A_1B_8 - A_0B_9)$
103	$r_1^6 r_2^4 \cos^3 \theta_1 \cos \theta_2$	$\pi\rho^{13}/4096\ (- A_{12}B_4 - 2A_{11}B_3 + 4A_{10}B_6 + 8A_9B_5 + 2A_9B_1 - 6A_8B_8 + A_8B_0 - 12A_7B_7 - 8A_7B_3 + 4A_6B_{10} - 4A_6B_2 + 8A_5B_9 + 12A_5B_5 - A_4B_{12} + 6A_4B_4 - 2A_3B_{11} - 8A_3B_7 - 4A_2B_6 + 2A_1B_9 + A_0B_8)$

(1) Fonction f figurant dans l'intégrant.
(2) Parité de l'indice des termes à conserver lorsqu'on calcule les K sur l'espace entier.

IV-Intégrales $K(\alpha, \rho)$ (calculées sur un demi-espace) V ([2])

$\pi\rho^{10}/512\ (1/3\ A_9 + 7/4\ A_8 + 16/5\ A_7 + 7/6\ A_6 - 50/21\ A_5 - 67/24\ A_4 - 8/21\ A_3 + 61/60\ A_2 + 41/63\ A_1 + 1/8\ A_0)$ I

$\pi\rho^{10}/512\ (-1/4\ A_9 - 17/15\ A_8 - 4/3\ A_7 + 4/3\ A_6 + 31/8\ A_5 + 178/63\ A_4 - 7/30\ A_3 - 92/63\ A_2 - 19/24\ A_1 - 1/7\ A_0)$ P

$\pi\rho^{10}/512\ (1/4\ A_9 + 7/5\ A_8 + 17/6\ A_7 + 64/35\ A_6 - 15/8\ A_5 - 926/315\ A_4 - 13/20\ A_3 + 104/105\ A_2 + 17/24\ A_1 + 1/7\ A_0)$ P

$\pi\rho^{10}/512\ (-1/5\ A_9 - A_8 - 52/35\ A_7 + 7/12\ A_6 + 82/21\ A_5 + 67/20\ A_4 + 4/45\ A_3 - 3/2\ A_2 - 31/35\ A_1 - 1/6\ A_0)$ I

$\pi\rho^{13}/4096\ (2/3\ A_{12} - 4/3\ A_{10} + 26/21\ A_8 - 8/9\ A_6 + 290/693\ A_4 - 148/1287\ A_2 + 2/143\ A_0)$ P

$\pi\rho^{13}/4096\ (1/4\ A_{12} + 8/15\ A_{11} - 5/6\ A_{10} - 88/105\ A_9 + 7/6\ A_8 + 16/35\ A_7 - 14/15\ A_6 - 688/3465\ A_5 + 7/15\ A_4 + 472/9009\ A_3 - 2/15\ A_2 - 8/1287\ A_1 + 1/60\ A_0)$ I

$\pi\rho^{13}/4096\ (-2/15\ A_{12} + 36/35\ A_{10} - 34/21\ A_8 + 568/495\ A_6 - 2826/5005\ A_4 + 44/273\ A_2 - 2/99\ A_0)$ P

$\pi\rho^{13}/4096\ (1/3\ A_{12} + A_{11} - 5/2\ A_9 - 5/21\ A_8 + 10/3\ A_7 + 8/9\ A_6 - 5/2\ A_5 - 75/77\ A_4 + A_3 + 56/117\ A_2 - 1/6\ A_1 - 1/11\ A_0)$ P

$\pi\rho^{13}/4096\ (-1/4\ A_{12} - 8/15\ A_{11} + 11/12\ A_{10} + 284/105\ A_9 - 7/12\ A_8 - 128/35\ A_7 - 7/20\ A_6 + 9928/3465\ A_5 + 49/60\ A_4 - 10664/9009\ A_3 - 29/60\ A_2 + 20/99\ A_1 + 1/10\ A_0)$ I

$\pi\rho^{13}/4096\ (1/4\ A_{12} + 4/5\ A_{11} + 1/12\ A_{10} - 64/35\ A_9 - 3/4\ A_8 + 312/105\ A_7 + 27/20\ A_6 - 2704/1155\ A_5 - 73/60\ A_4 + 2876/3003\ A_3 + 11/20\ A_2 - 16/99\ A_1 - 1/10\ A_0)$ I

$\pi\rho^{13}/4096\ (-1/5\ A_{12} - 1/2\ A_{11} + 4/7\ A_{10} + 7/3\ A_9 + 1/3\ A_8 - 7/2\ A_7 - 32/33\ A_6 + 14/5\ A_5 + 73/65\ A_4 - 7/6\ A_3 - 4/7\ A_2 + 1/5\ A_1 + 1/9\ A_0)$ P

POUVOIR SÉPARATEUR ET LUMINOSITÉ D'UN SPECTROGRAPHE β UTILISANT UN CHAMP MAGNÉTIQUE EN R^{-1}

Par C. BASTARD et J. LAFOUCRIÈRE,
Institut de Physique Nucléaire de l'Université de Lyon.

Résumé. — Dans 2 articles précédents nous avons étudié les caractéristiques d'un spectrographe β utilisant un champ magnétique inhomogène à rH constant. Nous étudions ici la position des diaphragmes, le pouvoir séparateur et la luminosité, celle-ci est excellente mais le pouvoir séparateur est limité par les dimensions de l'appareil.

Abstract. — In two previous papers we have studied the characteristics of a β spectrograph using an inhomogenous magnetic field of constant rH. Now, we study the position of the diaphragms, the resolving power and the luminosity, the latter is excellent but the resolving power is limited by the dimensions of the spectrograph.

Dans deux articles précédents [1] et [2] nous avons fait l'étude d'un spectrographe β d'un type nouveau, utilisant les trajectoires « trochoïdales » [3] des particules chargées dans un champ magnétique de révolution en r^{-1}. L'appareil possède une focalisation radiale parfaite, la précession (fig. 1) ayant la valeur

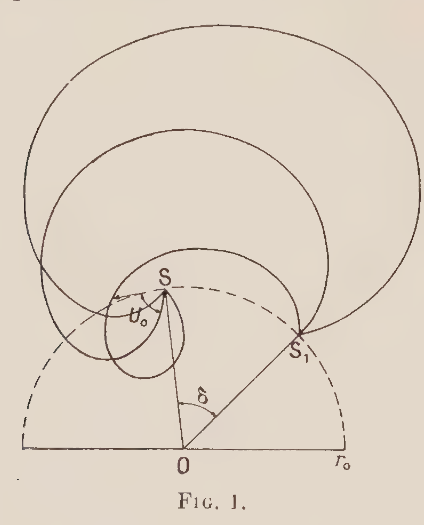


Fig. 1.

$$\delta = 2\pi[1 - (k/(k^2 - 1)^{1/2})].$$

L'étude des trajectoires gauches nous a permis de choisir les paramètres k et r_0 ($k = r_0 H_0/\rho H$. r_0 étant la distance de la source à l'axe de révolution du champ, H_0 la valeur du champ à cette distance et ρH l'impulsion des particules) égaux respectivement à 2,04 et à 20 cm et de prendre comme direction moyenne de tir la perpendiculaire au cercle $r = r_0$, l'angle maximum de tir étant de 45° de part et d'autre de cette direction ; ces valeurs sont en effet les plus favorables au point de vue focalisation axiale et réalisation pratique du spectrographe. Nous avons étudié également la formation de l'image d'une source ponctuelle ; la figure n° 2 représente les variations des cotes des points d'impact des trajectoires sur le cylindre $r = r_0$ en fonction de la précession δ pour $U_0 = 45°$, 90° et 135°. (U_0 est l'angle que fait la projection de la vitesse initiale sur le plan de symétrie avec la tangente au cercle $r = r_0$), les points marqués sur les courbes correspondent aux différentes valeurs de l'angle θ_0 que fait la vitesse initiale des particules avec le plan de symétrie. Nous nous proposons ici de déterminer le pouvoir séparateur et la luminosité de l'appareil.

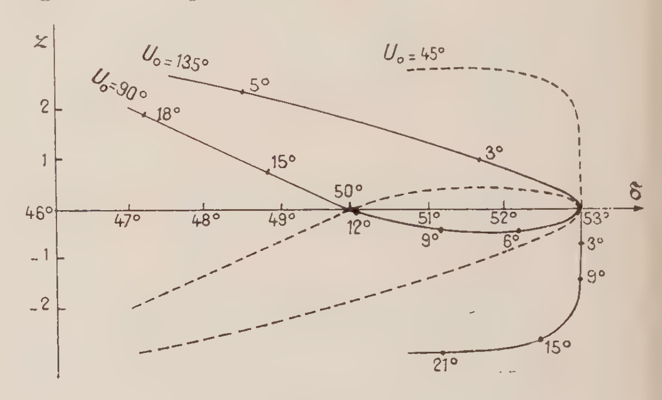


Fig. 2.

Étude de la position des diaphragmes. — Les trajectoires correspondant à une précession sous multiple de la précession δ correspondant à la valeur $k = 2,04$ soit 53° sont arrêtées par un arrêtoir circulaire placé entre la source et le détecteur (fig. 3).

La longueur de la fenêtre du compteur constituant le détecteur de particules β a été prise égale à 6 cm de manière à recevoir toutes les trajectoires dont l'angle U_0 est compris entre 45° et 135°. La largeur de la fenêtre va déterminer le

pouvoir séparateur et la valeur maximum θ_{0m} des angles θ_0. La courbe $\delta = f(\theta_0)$ [2] nous fournit ces valeurs θ_{0m}, le tableau ci-dessous donne les largeurs

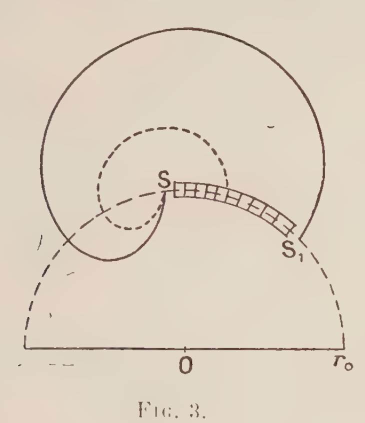


Fig. 3.

de fenêtre a et les angles θ_{0m} pour 4 valeurs de la variation $\Delta\delta$ de la précession et pour trois valeurs de U_0, $U_0 = 45°$, $U_0 = 90°$ et $U_0 = 135°$

$\Delta\delta$	a en mm	θ_{0m} $u_0 = 135°$	$u_0 = 90°$	$u_0 = 45°$
30′	1,7	1°30′	5°	15°
1°	3,5	2°20′	6°40′	18°
1°30′	5.2	2°50′	8°	20°
2°	8	3°20′	9°20′	22°20

Pour arrêter les trajectoires correspondant à des angles U_0 inférieurs à 45° ou supérieurs à 135° et des angles θ_0 supérieurs aux valeurs permises par la largeur de la fenêtre du compteur, nous utilisons un diaphragme central situé dans le plan méridien $\varphi = 6°6'$ passant par le maximum de la trajectoire correspondant à $U_0 = 90°$ et $\theta_0 = 0$. Pour

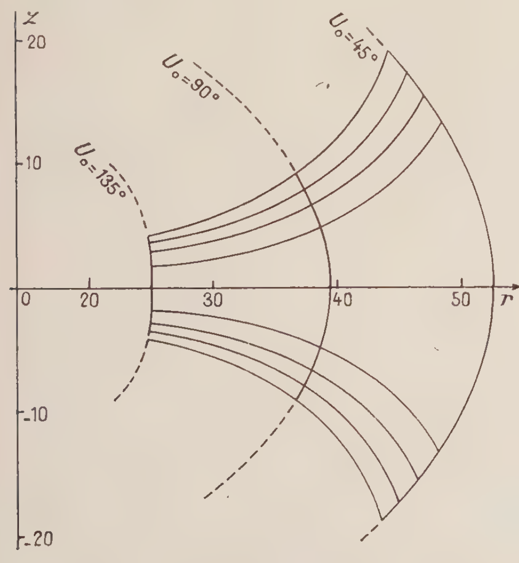


Fig. 4.

obtenir la forme du diaphragme précédent nous avons cherché les intersections des trajectoires des particules avec le plan $\varphi = 6°6'$ pour U_0 égal à 90°, 45° et 135°. Les valeurs de $\varphi'(t)$ et $r(t)$ ont été calculées à l'aide d'un ordinateur I. B. M. 650 (2), pour obtenir les valeurs de r correspondant à $\varphi = 6°6'$ on a intégré $\varphi'(t)$ par la méthode de Simpson pour les valeurs voisines de 6°6′ et on a tracé les courbes $r(\varphi)$. La figure n° 4 représente les différentes formes de diaphragmes pour les 4 variations $\Delta\delta$ précédentes.

Pouvoir séparateur. — Si on utilise un diaphragme correspondant à une variation $\Delta\delta$ de la précession, les courbes de la figure n° 2 nous montrent que l'appareil détecte non seulement les trajectoires dont la précession est comprise entre δ et $\delta - \Delta\delta$ mais aussi les trajectoires situées en dehors du plan de symétrie et dont la précession est comprise entre δ et $\delta + \Delta\delta$. Nous avons $\Delta\rho H/\rho H = \Delta k/k = [(k^2 - 1)^{3/2}/2\pi k]\,\Delta\delta$, le pouvoir séparateur de base peut alors être déterminé par le rapport $2\Delta k/k = [(k^2 - 1)^{3/2}/\pi k]\,\Delta\delta$ pour $k = 2{,}04$, $2\Delta k/k = 0{,}88\,\Delta\delta$.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de $2\Delta k/k$ pour les différentes largeurs de fenêtre vues précédemment.

Largeur de fenêtre en mm	$2\Delta k/k$
1,7	0,0076
3,5	0,0160
5.2	0,0230
8	0,0306

Luminosité. — L'angle solide sous lequel sont émises les particules est égal à

$$\Pi = 2\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \mathrm{d}u_0 \int_0^{\theta_{0m}} \cos\theta_0\,\mathrm{d}\theta_0.$$

La courbe représentative de la fonction reliant U_0 et θ_{0m} se compose pratiquement de 2 droites joignant les points d'abcisses $U_0 = 90°$, $U_0 = 45°$ et $U_0 = 90°$, $U_0 = 135°$.

Si

$$\frac{\pi}{2} < u_0 < \frac{\pi}{2} \qquad \theta_{0m} = a_2 u_0 + b_1.$$

Si

$$\frac{\pi}{2} < u_0 < \frac{3\pi}{4} \qquad \theta_{0m} = a_2 u_0 + b_2.$$

d'où

$$\Pi = -\frac{2}{a_2}\left[\cos\left(a_1\frac{\pi}{2} + b_1\right) - \cos\left(a_1\frac{\pi}{4} + b_1\right)\right]$$

$$-\frac{2}{a_2}\left[\cos\left(a_2\frac{\pi}{4} + b_2\right) - \cos\left(a_2\frac{\pi}{2} + b_2\right)\right]$$

8

les coefficients a_1, a_2, b_1, b_2 sont déterminés à l'aide du tableau du 1er paragraphe. On trouve pour les 4 valeurs de $\Delta\delta$ du paragraphe précédent :

$\Delta\delta$	$\Pi/4\pi$
30′	5,8 %
1°	7,2 %
1°30′	8,4 %
2°	9,6 %

Nous voyons d'après les résultats précédents que le spectrographe β dont nous venons de déterminer les caractéristiques possède un bon pouvoir séparateur et une excellente luminosité. Il est évident, comme nous l'avons montré [2] que l'on peut améliorer le pouvoir séparateur en choisissant pour le paramètre k une valeur plus proche de l'unité mais ceci est au dépend des dimensions de l'appareil et augmente les difficultés pratiques des réalisations.

Nous ne saurions terminer sans remercier M. le Pr J. Thibaud, Directeur de l'Institut de Physique Nucléaire, grâce auquel nous avons pû réaliser cette étude.

Manuscrit reçu le 20 octobre 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bastard (C.) et Lafoucrière (J.), *J. Physique Rad.*, 1958, **19**, 674.

[2] Bastard (C.), Lafoucrière (J.) et Margrita (R.), *J. Physique Rad.*, 1959, **20**, 736.

[3] Thibaud (J.), *C. R. Acad. Sc.*, 1933, **197**, 447, 915, 1629 et *Phys. Rev.*, 1934, **45**, 787.

REVUE DES LIVRES

Doetsch (G.), **Introduction à l'utilisation pratique de la transformation de Laplace** (traduit de l'allemand par M. Parodi), 1 vol. 16 × 25 cm, vi + 198 pages, 12 fig., Gauthier-Villars, Paris, 1959, 35 NF.

Le Pr Gustav Doetsch est bien connu du monde mathématique pour l'importante contribution qu'il a apportée à l'étude de la transformation de Laplace. Il a répondu à la demande de nombreux utilisateurs en présentant, sous une forme simple et véritablement pratique, et sans sacrifier la rigueur, les principales propriétés de la dite transformation, en s'attachant plus aux applications qu'à la théorie, en multipliant les exemples bien choisis, en poussant les calculs jusqu'au bout, en insistant sur les difficultés les plus fréquentes et en signalant les pièges où pourrait tomber l'utilisateur novice du calcul symbolique.

Voici la table des matières : Chapitre I : Définition et propriétés générales de la transformation de Laplace. Chapitre II : Les règles de calcul de la transformation de Laplace. Chapitre III : Équations différentielles ordinaires. Chapitre IV : Équations aux différences. Chapitre V : Équations aux dérivées partielles. Chapitre VI : Équations intégrales convolutives et relations intégrales. Chapitre VII: Calcul de la fonction originale à partir de la fonction image. Chapitre VIII : Le comportement asymptotique des fonctions et le problème de la stabilité.

Ajoutons qu'un signe emprunté au code de la route annonce les points les plus délicats et qu'une table de correspondances de plus de soixante pages termine cet ouvrage qui, malgré l'abondance des livres déjà parus sur le même sujet, rendra de réels services à tous ceux qui ont à manipuler la transformation de Laplace.

M. Jessel.

Boscher (J.), **Résolution par analogie électrique d'équations aux dérivées partielles du quatrième ordre intervenant dans divers problèmes d'élasticité.** (1 vol. 19 × 27 cm, vi + 130 pages, Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air, n° 348, décembre 1958, 2 251 F.)

Cet ouvrage présente, sous le nom de méthode des « réseaux superposés », une nouvelle méthode analogique pour résoudre certaines équations aux dérivées partielles. Le chapitre I en donne le principe théorique et les modalités de mise en pratique : traduction analogique des conditions aux limites, montage électrique, alimentation et appareils de mesure. Le reste de l'ouvrage est consacré aux applications : recherche de la fonction d'Airy qui régit l'état des contraintes dans un milieu élastique plan (chap. II) ; détermination du moment de flexion et de la fonction de déformation des poutres et des assemblages de poutres (chap. III) ; étude de la déformation des plaques élastiques chargées, détermination analogiques des modes de vibration des plaques et des membranes (chap. IV). De nombreux exemples numériques ont été traités, non seulement par la méthode proposée, mais également par d'autres procédés connus : cuve rhéoélectrique, papier conducteur, réseaux électriques simples. Certains comportent également des solutions mathématiques rigoureuses. On peut ainsi comparer entre elles les différentes méthodes analogiques et apprécier le degré de précision qu'on peut en espérer.

M. Jessel.

LE BARYCENTRE EN THÉORIE FONCTIONNELLE DES SYTÈMES DE CORPUSCULES

Par Florence AESCHLIMANN,
Institut Henri-Poincaré, Paris.

Résumé. — Définition d'une onde barycentrique pour un système de n corpuscules en théorie fonctionnelle relativiste ou non relativiste, avec spin ou isospin, ou sans spin. Équation de l'onde barycentrique relativiste et non relativiste. Cas de masses égales entre elles. Étude du mouvement autour du barycentre, équations des ondes relatives. Cas particulier d'un système de deux corpuscules.

Abstract. — Definition of the barycentric wave for a system of n particles in the functional theory, in the relativistic case and in the non relativistic case with spin and isospin or without spin. Equation for the barycentric wave in the relativistic case and in the non relativistic case. Case of particles of the same mass. Motion around the barycentre ; equations for the relative motion. Particular case of a two particle system.

1. **Introduction.** — Dans un article précédent [1], nous avons défini une « onde moyenne » pour un ensemble de corpuscules avec diverses pondérations ; ceci correspondait à la transposition d'une des propriétés fondamentales du centre de gravité, celle d'être un point moyen du système considéré. Maintenant, nous allons porter notre attention sur une autre propriété du centre de gravité : celle d'avoir comme quantité de mouvement la quantité de mouvement totale du système (lorsqu'on l'affecte de la masse totale). Ceci nécessite une hypothèse supplémentaire permettant de définir la quantité de mouvement d'un corpuscule, et au moyen de cette hypothèse, nous pourrons définir une onde u_G qui sera considérée comme l'onde du barycentre.

2. **Quantité de mouvement.** — En théorie de la double solution, M. Louis de Broglie [2] a admis que pour un corpuscule C auquel correspondait une onde u, en posant

$$u = f \, . \, e^{(i/\hbar)\varphi}$$

on avait

$$\boldsymbol{v} = -\frac{1}{m} \operatorname{grad} \varphi$$

pour la vitesse du corpuscule, d'où pour la quantité de mouvement

$$\boldsymbol{p} = - \operatorname{grad} \varphi.$$

Cette équation peut être posée, que l'on fasse ou non intervenir les ondes prévisionnelles ψ, et nous la prendrons comme définition de la quantité de mouvement d'un corpuscule.

Soit alors un système de n corpuscules C_1, C_2, ..., C_n dont pour le moment, nous négligeons le spin ; d'après ce que nous avons admis précédemment [3], chaque corpuscule C_j du système est représenté par une fonction u_j obéissant à une équation

$$\mathcal{L}_j \, u_j = Q_j. \qquad (1)$$

Nous décomposerons alors u_j en module et argument, en posant

$$f_j =_d |u_j|, \qquad \varphi_j = \hbar \arg u_j$$

où « arg » signifie « argument imaginaire de », d'où

$$u_j = f_j \, e^{(i/\hbar)\varphi_j}.$$

Par définition, la quantité de mouvement $\boldsymbol{p}_j$ du corpuscule C_j sera

$$\boldsymbol{p}_j =_d - \operatorname{grad} \varphi_j = - \hbar \operatorname{grad} \arg u_j.$$

Nous appellerons *quantité de mouvement totale* du système le vecteur $\boldsymbol{p}$ défini par

$$\boldsymbol{p} =_d \sum_j \boldsymbol{p}_j$$

d'où

$$\boldsymbol{p} = - \hbar \operatorname{grad} \sum_j \arg u_j.$$

3. **Onde barycentrique.** — Si nous voulons définir une onde u_G qui joue en théorie fonctionnelle le rôle du barycentre en Mécanique classique ou en Mécanique ondulatoire, il est essentiel qu'il lui corresponde une quantité de mouvement $\boldsymbol{p}_G$ qui soit égale à $\boldsymbol{p}$, de façon à conserver cette propriété classique fondamentale

$$\boldsymbol{p}_G = \boldsymbol{p}.$$

Cette relation aura lieu si nous avons

$$- \hbar \operatorname{grad} \varphi_G = - \hbar \sum_j \operatorname{grad} \varphi_j$$

d'où en intégrant

$$\varphi_G = \sum_j \varphi_j + C^{te} \, ;$$

la constante demeure indéterminée comme toute constante de phase, nous pouvons convenir de l'égaler à zéro, mais pour le moment, nous lui laissons une valeur arbitraire α. Nous aurons donc

$$\arg u_G = \sum_j \arg u_j + \alpha.$$

Ceci impose que nous ayons

$$u_G = \chi . \prod_{j=1}^{n} u_j$$

avec

$$\chi = |\chi| . e^{i\alpha}$$

où $|\chi|$ est une fonction réelle positive arbitraire de l'espace et du temps.

4. **Équation de l'onde barycentrique.** — Calculons la dérivée par rapport au temps de u_G ; nous aurons

$$\frac{\partial u_G}{\partial t} = \frac{\partial \chi}{\partial t} . \prod_{j=1}^{n} u_j + \chi . \sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} u_k . \frac{\partial u_j}{\partial t}$$

d'où

$$\frac{\partial u_G}{\partial t} = \frac{1}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial t} . u_G + \sum_j \frac{u_G}{u_j} . \frac{\partial u_j}{\partial t}. \qquad (2)$$

Nous avons admis [3] que l'opérateur $\mathfrak{L}_j$ de l'équation (1) était de la forme

$$\mathfrak{L}_j = \mathfrak{H}_j + i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

où $\mathfrak{H}_j$ ne contient pas $\frac{\partial}{\partial t}$, d'où pour u_j l'équation

$$i\hbar \frac{\partial u_j}{\partial t} = Q_j - \mathfrak{H}_j \, u_j. \qquad (3)$$

Posons

$$\mathcal{N}_j = \frac{Q_j}{u_j}$$

d'où

$$Q_j = \mathcal{N}_j . u_j. \qquad (4)$$

De là, nous tirons, en remplaçant $\frac{\partial u_j}{\partial t}$ par le second membre de cette équation et en portant dans (2) :

$$i\hbar \frac{\partial u_G}{\partial t} = \left[\frac{i\hbar}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial t} . + \sum_j \mathcal{N}_j\right] u_G - \sum \frac{u_G}{u_j} \mathfrak{H}_j \, u_j. \qquad (5)$$

En général, il n'y a pas séparation entre l'onde barycentrique et le mouvement des ondes u_j représentant les corpuscules du système, car les termes $\mathcal{N}_j$ et les opérateurs $\mathfrak{H}_j$ dépendent des ondes $u_1, u_2, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_n$ des autres corpuscules.

5. **Explicitation de l'équation.** — En [3] nous avons admis que

$$\mathfrak{H}_j = \mathfrak{T}_j + \mathcal{V}_{0j} + \mathfrak{R}_j \qquad (6)$$

avec

$$\mathfrak{T}_j = -\frac{\hbar^2}{2m_j} \Delta. \qquad (7)$$

Le terme en $\mathfrak{T}_j$ de l'équation (3) fait intervenir le potentiel quantique de M. Louis de Broglie associé à l'onde u_j. Le terme $\mathcal{V}_{0j}$ exprime l'action du champ extérieur sur le corpuscule C_j ; le champ extérieur est une fonction de point et du temps. Si ce champ ne contient pas un champ magnétique et se réduit à un potentiel scalaire, on aura

$$\frac{1}{u_j} \mathcal{V}_{0j} \, u_j = V_{0j}.$$

Si le champ extérieur contient un potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$, on aura

$$(\mathfrak{T}_j + \mathcal{V}_{0j}) \, u_j = \frac{1}{2m_j} \left(\vec{\mathfrak{p}}_j - \frac{\varepsilon_j}{c} \boldsymbol{A}\right)^2 u_j + V_{0j} \, u_j$$

où $\mathfrak{p}_j = i\hbar\nabla$, d'où

$$(\mathfrak{T}_j + \mathcal{V}_{0j}) \, u_j = -\frac{\hbar^2}{2m_j} \Delta u_j - \frac{i\hbar \, \varepsilon_j}{m_j \, c} \left[\boldsymbol{A} . \mathrm{grad} \, u_j + \frac{1}{2} (\mathrm{div} \, \boldsymbol{A}) \, u_j\right] + \frac{\varepsilon_j^2}{2m_j \, c^2} \boldsymbol{A}^2 \, u_j + V_{0j} \, u_j$$

et

$$\frac{1}{u_j} (\mathfrak{T}_j + \mathcal{V}_{0j}) \, u_j = -\frac{\hbar^2}{2m_j} \frac{\Delta u_j}{u_j} - \frac{i\hbar \, \varepsilon_j}{m_j c} \left[\frac{(\boldsymbol{A} . \mathrm{grad} \, u_j)}{u_j} + \frac{1}{2} \mathrm{div} \, \boldsymbol{A}\right] + \frac{\varepsilon_j^2}{2m_j \, c^2} \boldsymbol{A}^2 + V_{0j}.$$

En portant ceci dans l'équation en u_G, nous obtenons finalement

$$i\hbar \frac{\partial u_G}{\partial t} = \left\{ \frac{i\hbar}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial t} + \sum_j \left[\mathcal{N}_j + \frac{\hbar^2}{2m_j} \frac{\Delta u_j}{u_j} + \frac{i\hbar \, \varepsilon_j}{m_j \, c} \left(\frac{\boldsymbol{A} \, \mathrm{grad} \, u_j}{u_j} + \frac{1}{2} \mathrm{div} \, \boldsymbol{A}\right) - \frac{\varepsilon_j^2}{2m_j \, c^2} \boldsymbol{A}^2 - V_{0j} - \frac{\mathfrak{R}_j \, u_j}{u_j}\right] \right\} u_G. \qquad (8)$$

$\sum_j \mathcal{N}_j$ est le terme non linéaire et $\sum_j \frac{\hbar^2}{2m_j} \frac{\Delta u_j}{u_j}$ est l'opposé de la somme des potentiels quantiques de M. Louis de Broglie, enfin $-\sum_j \frac{\mathfrak{R}_j \, u_j}{u_j}$ est l'opposé des termes d'interaction ; les autres termes dérivent du potentiel vecteur du champ extérieur $\boldsymbol{A}(P, t)$ et du potentiel scalaire extérieur.

On peut profiter de l'arbitraire qui demeure sur la fonction χ pour simplifier l'équation précédente (8) ; on peut soit poser $\chi = C^{te}$ et en particulier, $\chi = 1$ pour faire disparaître le premier terme du second membre, soit poser

$$\frac{1}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial t} = \sum_j \frac{\varepsilon_j}{2m_j \, c} \mathrm{div} \, \boldsymbol{A} \qquad (9)$$

pour faire disparaître en même temps le terme en divergence. Cette équation (9) s'intègre immédiatement et on a

$$\mathrm{Log} \, \chi = \left(\sum_j \frac{\varepsilon_j}{2m_j \, c}\right) \int_{t_0}^{t} \mathrm{div} \, \boldsymbol{A} . dt + g(x, y, z)$$

d'où

$$\chi = e^{\eta \int_{t_0}^{t} \operatorname{div} \boldsymbol{A} . dt + g(x,y,z)}$$

où $g(x, y, z)$ est une fonction de point arbitraire, et où on a posé

$$\eta = d \sum_j \frac{\varepsilon_j}{2m_j c}.$$

Lorsque $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$ (en particulier lorsque $\boldsymbol{A} = C^{te}$), on a $\chi = C^{te}$.

6. **Cas où toutes les masses sont égales.** — Si l'on a pour toute valeur de l'indice j comprise entre 1 et n, la relation $m_j = m$, on peut donner une autre forme à l'équation précédente (8) en transformant les termes en $\dfrac{\Delta u_j}{u_j}$. On a en effet :

$$\Delta u_G = \Delta\left(\chi \prod_{j=1}^{n} u_j\right) = \left[\frac{\Delta\chi}{\chi} + 2\left(\frac{\operatorname{grad}\chi}{\chi} . \sum_j \frac{\operatorname{grad} u_j}{u_j}\right)\right.$$
$$\left. + \sum_j \frac{\Delta u_j}{u_j} + \sum_{j,k} \frac{(\operatorname{grad} u_j . \operatorname{grad} u_k)}{u_j . u_k}\right] u_G$$

d'où l'on tire une expression pour $\sum_j \dfrac{\Delta u_j}{u_j} u_G$ que l'on porte dans l'équation (8), ce qui donne :

$$i\hbar \frac{\partial u_G}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta u_G - \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \left[\sum_{j,k} \frac{(\operatorname{grad} u_j . \operatorname{grad} u_k)}{u_j . u_k}\right.\right.$$
$$\left. + 2\left(\frac{\operatorname{grad}\chi}{\chi} . \sum_j \frac{\operatorname{grad} u_j}{u_j}\right) + \frac{\Delta\chi}{\chi}\right] - \frac{i\hbar}{\chi}\frac{\partial\chi}{\partial t}$$
$$- \frac{i\hbar}{mc} \sum_j \varepsilon_j \left(\frac{\boldsymbol{A} . \operatorname{grad} u_j}{u_j} + \frac{1}{2} \operatorname{div} \boldsymbol{A}\right)$$
$$\left. + \frac{1}{2mc^2} \sum_j \varepsilon_j^2 \boldsymbol{A}^2 + \sum_j \left(V_{0j} + \frac{\mathfrak{R}_j u_j}{u_j} - \mathcal{N}_j\right)\right\} u_G.$$

L'équation prendra sa forme la plus simple si l'on pose $\chi = C^{te}$; nous poserons alors $\chi = 1$ et nous aurons pour l'expression de u_G :

$$i\hbar \frac{\partial u_G}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta u_G - \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j,k} \frac{(\operatorname{grad} u_j \operatorname{grad} u_k)}{u_j . u_k}\right.$$
$$- \frac{i\hbar}{mc} \sum_j \varepsilon_j \left[\frac{(\boldsymbol{A} . \operatorname{grad} u_j)}{u_j} + \frac{1}{2} \operatorname{div} \boldsymbol{A}\right] + \frac{1}{2mc^2} \sum_j \varepsilon_j^2 \boldsymbol{A}^2$$
$$\left. + \sum_j \left(V_{0j} + \frac{\mathfrak{R}_j u_j}{u_j} - \mathcal{N}_j\right)\right\} u_G. \qquad (10)$$

On voit que, même en tenant compte du principe de l'action et de la réaction qui ferait disparaître certains termes en $\mathfrak{R}_j$ et certains termes non linéaires $\mathcal{N}_j$ et en l'absence de champ extérieur, il n'y a pas séparation du mouvement de l'onde barycentrique u_G des ondes u_j des autres corpuscules à cause des termes en $(\operatorname{grad} u_j . \operatorname{grad} u_k)$.

7. **Mouvement autour du barycentre.** — En mécanique classique, on considère le mouvement autour du barycentre et l'on a

$$\boldsymbol{v}(M_j)_{/T} = \boldsymbol{v}(G)_{/T} + \boldsymbol{v}(M_j)_{/T_G}$$

par suite

$$\boldsymbol{p}_j = \frac{m_j}{\mathcal{M}} \boldsymbol{p}_G + \boldsymbol{p}_{r,j}.$$

Cette relation nous permet, en utilisant la définition posée plus haut pour la quantité de mouvement d'un corpuscule, de définir une *onde relative* $u_{r,j}$ pour le corpuscule C_j en posant :

$$\boldsymbol{p}_{r,j} = - \operatorname{grad} \varphi_{r,j} = - \hbar \operatorname{grad} \arg u_{r,j}.$$

On devra donc avoir

$$\operatorname{grad} \varphi_{r,j} = \operatorname{grad} \varphi_j - \frac{m_j}{\mathcal{M}} \operatorname{grad} \varphi_G$$

d'où

$$\varphi_{r,j} = \varphi_j - \frac{m_j}{\mathcal{M}} \varphi_G + C^{te} ;$$

il reste une constante de phase indéterminée que nous désignerons par α_j, d'où

$$\arg u_{r,j} = \arg u_j - \frac{m_j}{\mathcal{M}} \arg u_G + \alpha_j.$$

Ceci impose que nous ayons

$$u_{r,j} = \chi_j \, u_j . u_G^{-m_j/\mathcal{M}} \qquad (11)$$

et

$$\chi_j = |\chi_j| . e^{i\alpha_j}$$

$|\chi_j|$ est une fonction arbitraire, réelle et positive de point de l'espace et du temps et α_j une constante réelle arbitraire.

8. **Équation de l'onde relative.** — De l'équation (11), en la dérivant par rapport au temps, nous obtiendrons une équation pour l'onde relative $u_{r,j}$:

$$\frac{\partial u_{r,j}}{\partial t} = \left(\frac{1}{\chi_j}\frac{\partial \chi_j}{\partial t} + \frac{1}{u_j}\frac{\partial u_j}{\partial t} - \frac{m_j}{\mathcal{M}}\frac{1}{u_G}\frac{\partial u_G}{\partial t}\right) u_{r,j}$$

d'où, en remplaçant $\dfrac{\partial u_j}{\partial t}$ par sa valeur tirée de (3) compte tenu de l'expression (4) de Q_j et $\dfrac{\partial u_G}{\partial t}$ par sa valeur tirée de (5), nous obtenons :

$$i\hbar \frac{\partial u_{r,j}}{\partial t} = \left\{ \frac{i\hbar}{\chi_j}\frac{\partial \chi_j}{\partial t} + \left(\mathcal{N}_j - \frac{1}{u_j} [\mathfrak{H}_j u_j] .\right)\right.$$
$$\left. - \frac{m_j}{\mathcal{M}} \frac{1}{u_G} \left[\left(\frac{i\hbar}{\chi}\frac{\partial\chi}{\partial t} + \sum_k \mathcal{N}_k\right) u_G - \sum_k \frac{u_G}{u_k} \mathfrak{H}_k u_k\right]\right\} u_{r,j}$$

$$i\hbar \frac{\partial u_{r,j}}{\partial t} = \left\{ \frac{i\hbar}{\chi_j}\frac{\partial \chi_j}{\partial t} - \frac{m_j}{\mathcal{M}} \frac{i\hbar}{\chi}\frac{\partial\chi}{\partial t} + \mathcal{N}_j - \frac{m_j}{\mathcal{M}} \sum_k \mathcal{N}_k \right\} u_{r,j}$$
$$- \left[\frac{u_{r,j}}{u_j} \mathfrak{H}_j u_j - \frac{m_j}{\mathcal{M}} \sum_k \frac{u_{r,j}}{u_k} \mathfrak{H}_k u_k\right] ; \qquad (16)$$

on peut choisir χ_j qui est arbitraire pour donner la forme la plus simple à cette équation, pour cela, il suffit de poser :

$$\frac{i\hbar}{\chi_j}\frac{\partial \chi_j}{\partial t} = \frac{m_j}{\mathcal{M}} \frac{i\hbar}{\chi}\frac{\partial \chi}{\partial t}.$$

Cette équation sera satisfaite si

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Log} \chi_j = \frac{m_j}{\mathcal{M}} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Log} \chi$$

d'où

$$\operatorname{Log} \chi_j = \frac{m_j}{\mathcal{M}} \operatorname{Log} \chi + g_j(x, y, z)$$

où $g_j(x, y, z)$ est une fonction de point arbitraire, d'où

$$\chi_j = \chi^{m_j/\mathcal{M}}(x, y, z, t) . e^{g_j(x,y,z)}.$$

Si l'on a pris $\chi = 1$, alors on prendra aussi $\chi_j = 1$.

D'autre part, nous pouvons remplacer u_j et les u_k par leur expression en u_G, $u_{r,j}$, $u_{r,k}$ donnée par (11) ; dans ces conditions (12) prend alors la forme

$$i\hbar \frac{\partial u_{r,j}}{\partial t} = \left\{ \mathcal{H}_j - \frac{m_j}{\mathcal{M}} \sum_k \mathcal{H}_k \right\} u_{r,j} - \chi_j . u_G^{-m_j/\mathcal{M}} \mathfrak{H}_j \left(\frac{u_{r,j}}{\chi_j} u_G^{m_j/\mathcal{M}} \right) + \frac{m_j}{\mathcal{M}} \sum_k \frac{u_{r,j}}{u_{r,k}} . \chi_k . u_G^{-m_k/\mathcal{M}} . \mathfrak{H}_k \left(\frac{u_{r,k}}{\chi_k} u_G^{m_k/\mathcal{M}} \right). \quad (13)$$

Si nous explicitons $\mathfrak{H}_j$ par (6) et (7) comme nous l'avons fait plus haut, on a

$$\mathfrak{T}_j u_j = -\frac{\hbar^2}{2m_j} \Delta u_j = -\frac{\hbar^2}{2m_j} \Delta(u_{r,j} . \chi^{-1} . u_G^{m_j/\mathcal{M}})$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m_j} \Big\{ \chi^{-1} . u_G^{m_j/\mathcal{M}} . \Delta u_{r,j} - \chi_j^{-2} . u_{r,j} . u_G^{m_j/\mathcal{M}} . \Delta \chi_j + \frac{m_j}{\mathcal{M}} \chi_j^{-1} . u_{r,j} u_G^{(m_j/\mathcal{M})-1} . \Delta u_G + 2\chi_j^{-3} u_{r,j} . u_G^{m_j/\mathcal{M}} (\operatorname{grad} \chi_j)^2 + \frac{m_j}{\mathcal{M}} \left(\frac{m_j}{\mathcal{M}} - 1 \right) \chi_j^{-1} . u_{r,j} . u_G^{(m_j/\mathcal{M})-2} (\operatorname{grad} u_G)^2 - 2\chi_j^{-2} . u_G^{(m_j/\mathcal{M})} (\operatorname{grad} \chi_j . \operatorname{grad} u_{r,j}) + 2 \frac{m_j}{\mathcal{M}} \chi_j^{-1} . u_G^{(m_j/\mathcal{M})-1} (\operatorname{grad} u_G . \operatorname{grad} u_{r,j}) - 2 \frac{m_j}{\mathcal{M}} \chi_j^{-2} . u_{r,j} . u_G^{(m_j/\mathcal{M})-1} (\operatorname{grad} \chi_j . \operatorname{grad} u_G) \Big\}.$$

On voit que cette expression prendra sa forme la plus simple si $\chi_j = \chi = 1$; dans ce cas, on aura :

$$\mathfrak{T}_j u_j = -\frac{\hbar^2}{2m_j} \Big\{ u_G^{m_j/\mathcal{M}} \Delta u_{r,j} + \frac{m_j}{\mathcal{M}} u_{r,j} u_G^{(m_j/\mathcal{M})-1} \Delta u_G + \frac{m_j}{\mathcal{M}} \left(\frac{m_j}{\mathcal{M}} - 1 \right) u_{r,j} . u_G^{(m_j/\mathcal{M})-2} (\operatorname{grad} u_G)^2 + 2 \frac{m_j}{\mathcal{M}} u_G^{(m_j/\mathcal{M})-1} (\operatorname{grad} u_G . \operatorname{grad} u_{r,j} \Big\}. \quad (14)$$

Nous obtenons alors comme équation pour $u_{r,j}$, d'après (6), (7), (13) et (14) :

$$i\hbar \frac{\partial u_{r,j}}{\partial t} = \left\{ \mathcal{H}_j - \frac{m_j}{\mathcal{M}} \sum_k \mathcal{H}_k \right\} u_{r,j} + \frac{\hbar^2}{2m_j} \Big[\Delta + \frac{m_j}{\mathcal{M}} \frac{\Delta u_G}{u_G} + \frac{m_j}{\mathcal{M}} \left(\frac{m_j}{\mathcal{M}} - 1 \right) \frac{(\operatorname{grad} u_G)^2}{u_G^2} + 2 \frac{m_j}{\mathcal{M}} \frac{\operatorname{grad} u_G}{u_G} \operatorname{grad} \Big] u_{r,j}$$

$$- (\mathcal{V}_{0j} + \mathfrak{R}_j) u_{r,j} - \frac{\hbar^2}{2} \frac{m_j}{\mathcal{M}} \sum_k \frac{1}{m_k} \left(\frac{\Delta u_{r,k}}{u_{r,k}} + \frac{m_k}{\mathcal{M}} \frac{\Delta u_G}{u_G} + \frac{m_k}{\mathcal{M}} \left(\frac{m_k}{\mathcal{M}} - 1 \right) \frac{(\operatorname{grad} u_G)^2}{u_G^2} + 2 \frac{m_k}{\mathcal{M}} \frac{\operatorname{grad} u_G}{u_G} . \frac{\operatorname{grad} u_{r,k}}{u_{r,k}} \right) u_{r,j}$$

$$+ \frac{m_j}{\mathcal{M}} \left[\sum_k \frac{\mathcal{V}_{0k} + \mathfrak{R}_k}{u_{r,k}} \right] u_{r,j}. \quad (15)$$

Si l'on tient compte du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, cette équation se simplifie un peu, mais le mouvement relatif ne se sépare pas du mouvement du centre de gravité.

9. **Système de deux corpuscules.** — Pour un système de deux corpuscules représentés par des ondes u_1 et u_2, on a comme équations

$$\mathcal{L}_1 u_1 = Q_1, \qquad \mathcal{L}_2 u_2 = Q_2,$$

d'où l'équation de l'onde barycentrique d'après (5) :

$$i\hbar \frac{\partial u_G}{\partial t} = (\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2) u_G - u_G \left(\frac{1}{u_1} \mathfrak{H}_1 u_1 + \frac{1}{u_2} \mathfrak{H}_2 u_2 \right)$$

qui d'après (8) s'explicite en :

$$i\hbar \frac{\partial u_G}{\partial t} = \Big\{ \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\Delta u_1}{u_1} + \frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\Delta u_2}{u_2} + \frac{i\hbar}{c} \left[\boldsymbol{A} \left(\frac{\varepsilon_1}{m_1 u_1} \operatorname{grad} u_1 + \frac{\varepsilon_2}{m_2 u_2} \operatorname{grad} u_2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_1}{m_1} + \frac{\varepsilon_2}{m_2} \right) \operatorname{div} \boldsymbol{A} \right] - \left(\frac{\varepsilon_1^2}{m_1} + \frac{\varepsilon_2^2}{m_2} \right) \frac{\boldsymbol{A}^2}{2c^2} - V_{01} - V_{02} - \frac{\mathfrak{R}_1 u_1}{u_1} - \frac{\mathfrak{R}_2 u_2}{u_2} \Big\} u_G.$$

Les ondes relatives $u_{r,1}$ et $u_{r,2}$ d'après (13), obéiront aux équations :

$$i\hbar \frac{\partial u_{r,j}}{\partial t} = \left\{ \mathcal{H}_j - \frac{m_j}{\mathcal{M}} (\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2) u_{r,j} - u_G^{-m_j/\mathcal{M}} \mathfrak{H}_j(u_{r,j} u_G^{m_j/\mathcal{M}}) + \frac{m_j}{\mathcal{M}} \left(\frac{u_{r,j}}{u_{r,1}} u_G^{-m_1/\mathcal{M}} \mathfrak{H}_1(u_{r,1} u_G^{m_1/\mathcal{M}}) + \frac{u_{r,j}}{u_{r,2}} u_G^{-m_2/\mathcal{M}} \mathfrak{H}_2(u_{r,2} u_G^{m_2/\mathcal{M}}) \right) \right.$$

En précisant les valeurs $j = 1$ et $j = 2$ de

l'indice j et en regroupant les termes, on obtient les deux équations :

$$i\hbar \frac{\partial u_{r,1}}{\partial t} = \frac{1}{\mathcal{M}} \Big\{ (m_2 \mathcal{H}_1 - m_1 \mathcal{H}_2)\, u_{r,1} - m_2\, u_G^{-m_1/\mathcal{M}}\, \mathfrak{H}_1\, u_{r,1}\, u_G^{m_1/\mathcal{M}} + m_1 \frac{u_{r,1}}{u_{r,2}}\, u_G^{-m_2/\mathcal{M}}\, \mathfrak{H}_2\, u_{r,2}\, u_G^{m_2/\mathcal{M}} \Big\}$$

$$i\hbar \frac{\partial u_{r,2}}{\partial t} = \frac{1}{\mathcal{M}} \Big\{ (m_1 \mathcal{H}_2 - m_2 \mathcal{H}_1)\, u_{r,2} - m_1\, u_G^{-m_2/\mathcal{M}}\, \mathfrak{H}_2\, u_{r,2}\, u_G^{m_2/\mathcal{M}} + m_2 \frac{u_{r,2}}{u_{r,1}}\, u_G^{-m_1/\mathcal{M}}\, \mathfrak{H}_1\, u_{r,1}\, u_G^{m_1/\mathcal{M}} \Big\}. \quad (16)$$

En explicitant $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{H}_2$ on aura d'après (14) après regroupement des termes :

$$i\hbar \frac{\partial u_{r,1}}{\partial t} = \frac{1}{\mathcal{M}} (m_2 \mathcal{H}_1 - m_1 \mathcal{H}_2)\, u_{r,1} + \frac{\hbar^2 m_2}{2\mathcal{M} m_1} \Big[\Delta + \frac{m_1}{\mathcal{M}} \frac{\Delta u_G}{u_G} - \frac{m_1 m_2}{\mathcal{M}^2} \Big(\frac{\text{grad } u_G}{u_G}\Big)^2 + 2 \frac{m_1}{\mathcal{M}} \frac{\text{grad } u_G}{u_G} \text{grad} \Big] u_{r,1}$$
$$- \frac{\hbar^2 m_1}{2\mathcal{M} m_2} \Big[\frac{\Delta u_{r,2}}{u_{r,2}} + \frac{m_2}{\mathcal{M}} \frac{\Delta u_G}{u_G} - \frac{m_1 m_2}{\mathcal{M}^2} \Big(\frac{\text{grad } u_G}{u_G}\Big)^2 + 2 \frac{m_2}{\mathcal{M}} \frac{\text{grad } u_G}{u_G} \frac{\text{grad } u_{r,2}}{u_{r,2}} \Big] u_{r,1}$$
$$- \frac{m_2}{\mathcal{M}} (\mathcal{V}_{01} + \mathfrak{R}_1)\, u_{r,1} + \frac{m_1}{\mathcal{M}} (\mathcal{V}_{02} + \mathfrak{R}_2)\, u_{r,1}$$

et une équation semblable pour $u_{r,2}$ obtenue en échangeant les indices 1 et 2.

10. **Équation réduite.** — Les deux équations en $u_{r,1}$ et $u_{r,2}$ ne sont pas indépendantes, car on a

$$\boldsymbol{p}_{r,1} + \boldsymbol{p}_{r,2} = 0$$

et d'après (6), si on pose $\chi_j = 1$, on aura

$$u_{r,1} \cdot u_{r,2} = 1\ ;$$

comme en Mécanique classique, on pose

$$p_r = p_{r,2} - p_{r,1} = 2p_{r,2} = -2p_{r,1}$$

ceci nous conduit à prendre comme fonction décrivant le mouvement autour du barycentre, la fonction u_r définie par

$$u_r = \frac{u_{r,2}}{u_{r,1}} = u_{r,2}^2 = \frac{1}{u_{r,1}^2}, \quad u_{r,1} = u_r^{-1/2}, \quad u_{r,2} = u_r^{1/2}.$$

Dérivons u_r par rapport au temps :

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = u_{r,1}^{-1} \frac{\partial u_{r,2}}{\partial t} - u_{r,2} \cdot u_{r,1}^{-2} \frac{\partial u_{r,1}}{\partial t}$$

d'où en se reportant aux équations (16) pour $u_{r,1}$ et $u_{r,2}$, on obtient après réduction des facteurs l'équation suivante pour u_r :

$$i\hbar \frac{\partial u_r}{\partial t} = \frac{2}{\mathcal{M}} \big[u_r (m_1 \mathcal{H}_2 - m_2 \mathcal{H}_1) - m_1\, u_r^{1/2}\, u_G^{-m_2/\mathcal{M}} (\mathfrak{T}_2 + \mathcal{V}_{02} + \mathfrak{R}_2)\, u_r^{1/2}\, u_G^{m_2/\mathcal{M}} + m_2\, u_r^{3/2}\, u_G^{-m_1/\mathcal{M}} (\mathfrak{T}_1 + \mathcal{V}_{01} + \mathfrak{R}_1)\, u_r^{-1/2}\, u_G^{m_1/\mathcal{M}} \big]\ ; \quad (18)$$

sachant que

$$\mathfrak{T}_1 = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \Delta, \qquad \mathfrak{T}_2 = -\frac{\hbar^2}{2m_2} \Delta,$$

en explicitant les Laplaciens, on aura :

$$i\hbar \frac{\partial u_r}{\partial t} = \frac{2}{\mathcal{M}} \Big[(m_1 \mathcal{H}_2 - m_2 \mathcal{H}_1 - m_1(\mathcal{V}_{02} + \mathfrak{R}_2) + m_2(\mathcal{V}_{01} + \mathfrak{R}_1]\, u_r + \frac{\hbar^2}{\mathcal{M}} \Big\{ \frac{1}{2} \Big(\frac{m_2}{m_1} + \frac{m_1}{m_2}\Big) \Delta u_r - \frac{1}{4} \Big(\frac{m_1}{m_2} - 3\frac{m_2}{m_1}\Big) \frac{(\text{grad } u_r)^2}{u_r}$$
$$+ \frac{\text{grad } u_G}{u_G} \text{grad } u_r - \frac{1}{\mathcal{M}} (m_2 - m_1)\, u_r \frac{\Delta u_G}{u_G} + \frac{1}{\mathcal{M}^2} (m_2 - m_1) \frac{(\text{grad } u_G)^2}{u_G^2}\, u_r \Big\}. \quad (19)$$

Si les masses sont égales, cette expression se réduit à :

$$i\hbar \frac{\partial u_r}{\partial t} = (\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_1 - \mathcal{V}_{02} + \mathcal{V}_{01} - \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_1)\, u_r + \frac{\hbar^2}{2m} \Big\{ \Delta u_r + \frac{(\text{grad } u_G}{u_G} . \text{grad } u_r + \frac{1}{2} \frac{(\text{grad } u_r)^2}{u_r} \Big\}.$$

11. **Cas de corpuscules doués de spin.** — Si l'on a un système doué de spin ou de spin isotopique, la fonction u_j du j^e corpuscule a des composantes $u_{j\alpha}$. La fonction u_G de l'onde barycentrique aura des composantes avec des indices correspondant à chaque corpuscule du système ; on aura :

$$u_G(P, t)_{\alpha\beta\gamma\ldots\omega} = u_1(P, t)_\alpha \cdot u_2(P, t)_\beta \cdot u_3(P, t)_\gamma \ldots u_n(P, t)_\omega$$

et cela pour tous les systèmes $\alpha\beta\gamma \ldots \omega$ de valeurs possibles des indices. Le système d'équations pour l'onde $u_G(P, t)$ s'obtient de la même façon que dans le cas de l'absence de composantes, en prenant la dérivée par rapport au temps des deux membres de l'équation précédente et en remplaçant les $\frac{\partial u_{j\lambda}}{\partial t}$ par leur expression fournie par les équations du système de corpuscules.

Les ondes relatives $u_{r,j}(P, t)$ seront définies par

$$u_{r,1}(P, t)_{\alpha\beta\gamma\ldots\omega} = u_1(P, t)_\alpha \cdot u_G(P, t)_{\alpha\beta\ldots\omega}^{-m_1/\mathcal{M}}$$

$$u_{r,2}(P, t)_{\alpha\beta\gamma\ldots\omega} = u_2(P, t)_\beta \cdot u_G(P, t)_{\alpha\beta\ldots\omega}^{-m_2/\mathcal{M}}$$

. . . .

$$u_{r,n}(P, t)_{\alpha\beta\gamma\ldots\omega} = u_n(P, t)_\omega \cdot u_G(P, t)_{\alpha\beta\ldots\omega}^{-m_n/\mathcal{M}}$$

Les $u_{r,j}(P, t)$ ont autant de composantes que $u_G(P, t)$ car ces ondes dépendent de tout le système.

Les équations des corpuscules du système

$$\mathcal{L}_j\, u_{j\lambda} = Q_{j\lambda}$$

peuvent être des équations non relativistes ou des équations relativistes, en particulier des équations de corpuscules de Dirac de spin 1/2 ou des équations de corpuscules fondus de spin entier ou demi-entier. En effet, on peut définir des produits tensoriels de spineurs, on peut donc définir sans difficulté une onde barycentrique.

12. **Équation de l'onde barycentrique relativiste.** — On a

$$u_{G,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} = \prod_{j=1}^{n} u_{j,\beta_j}$$

d'où

$$\frac{\partial u_{G,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} u_{k,\beta_k} \frac{\partial u_{j\beta_j}}{\partial t}.$$

Posons

$$Q_{j,\beta_j} = \mathcal{M}_{j,\beta_j}\, u_{j,\beta_j}$$

alors l'équation de l'onde barycentrique est

$$\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial u_{G,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{u_{G,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}}{c u_{j,\beta_j}} (\mathcal{M}_{j,\beta_j} - \mathfrak{H}_j)\, u_{j,\beta_j}.$$

Explicitons cette équation dans le cas d'un système de n corpuscules de Dirac de spin 1/2. On a dans ce cas

$$\frac{1}{c}(\mathcal{M}_{j,\beta_j} - \mathfrak{H}_j) u_{j,\beta_j} = \frac{1}{c} Q_{j,\beta_j} + \left(\frac{e}{c}\mathcal{V}_j + \sum_{k=1}^{3} \alpha_{j,k}\, p_k + \alpha_{j,4}\, m_j\, c\right) u_{j\beta_j}$$

et

$$Q_{j,\beta_j} = \sum_{\nu=1}^{16} \mathcal{M}_{j\nu}\, \alpha_{j\nu}\, u_{j,\beta_j}.$$

alors

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial ct} u_{G,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} = \sum_{\nu=1}^{16} \frac{u_{G,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}}{u_{j\beta_j}} \left\{\frac{1}{c}\sum_{\nu=1}^{16} \mathcal{M}_{j\nu}\alpha_{j\nu} + \frac{e}{c}\mathcal{V}_j + \sum_{k=1}^{3}\alpha_{j,k}\, p_k + \alpha_{j,4}\, m_j\, c\right\} u_{j,\beta_j};$$

désignons par $\alpha_{j\nu}^{\Theta}$ le produit de fusion de $\alpha_{j\nu}$ par des matrices unités 1_k pour $k = 1$ à n et $k \neq j$, et remarquons que

$$\alpha_{ji}^{\Theta} \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} u_{k\beta_k} \frac{\partial u_{j\beta_j}}{\partial x_i} = \alpha_{ji}^{\Theta} \frac{\partial}{\partial x_i} u_{G,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} - \alpha_{ji}^{\Theta} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} u_{G,\beta_1\ldots\beta_n} \frac{1}{u_{k,\beta_k}} \frac{\partial u_{k,\beta_k}}{\partial x_i}.$$

On obtient alors, comme équation de l'onde barycentrique

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial ct} u_{G,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} &= \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{\nu=1}^{16} \frac{1}{c} \mathcal{M}_{j\nu}\alpha_{j\nu}^{\Theta} + \frac{e_j}{c}\mathcal{V}_j + \alpha_{j,4}^{\Theta}\, m_j\, c + \frac{e_j}{c}\, \boldsymbol{\alpha}_j^{\Theta} . \mathcal{A}_j \right\} u_{G,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} \\ &+ i\hbar \sum_{j=1}^{n} \left\{ \boldsymbol{\alpha}_j^{\Theta} . \mathrm{grad}\, u_{G,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} - \boldsymbol{\alpha}_j^{\Theta}\, u_{G,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \frac{1}{u_{k\beta_k}}\, \mathrm{grad}\, u_{k\beta_k} \right\}. \end{aligned} \tag{20}$$

Cette équation est générale car certains parmi les n corpuscules de spin 1/2 du système peuvent être fondus ; elle contient donc le cas où il y aurait dans le système des corpuscules de spin maximum quelconque. Dans l'écriture de l'équation précédente, on peut supprimer les indices $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ et on aura ainsi une écriture condensée représentant l'ensemble des équations. Cette équation de l'onde barycentrique peut être étendue au cas où n est infiniment grand et de cette façon, on peut incorporer les champs dans le système ; en particulier, le champ électromagnétique sera représenté par des corpuscules de spin 1, c'est-à-dire par des paires de corpuscules de spin 1/2 fondus.

Par la même méthode, on écrirait les équations pour les fonctions d'ondes relatives $u_{r,j,\beta_1\beta_2\beta_n}$.

13. **Cas de deux corpuscules.** — Dans le cas d'un système de deux corpuscules, l'équation (21) se réduit à la suivante :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial ct} u_{G,\alpha\beta} &= \left\{ \frac{1}{c} \sum_{\nu=1}^{16} (\mathcal{M}_{1,\nu}\alpha_{1,\nu}^{\Theta} + \mathcal{M}_{2,\nu}\alpha_{2,\nu}^{\Theta}) + \frac{1}{c}(e_1 \mathcal{V}_1 + e_2 \mathcal{V}_2) \right. \\ &\left. + (\alpha_{1,4}^{\Theta}\, m_1 + \alpha_{2,4}^{\Theta}\, m_2)\, c + \frac{1}{c}(e_1\, \alpha_1^{\Theta}\mathfrak{A}_1 + e_2\, \alpha_2^{\Theta} . \mathfrak{A}_2) \right\} u_{G,\alpha\beta} \\ &+ i\hbar \left[(\alpha_1^{\Theta} + \alpha_2^{\Theta})\, \mathrm{grad}\, u_{G,\alpha\beta} - \alpha_1^{\Theta}\, u_{G,\alpha\beta} \frac{1}{u_{2,\beta}}\, \mathrm{grad}\, u_{2,\beta} - \alpha_2^{\Theta}\, u_{G,\alpha\beta} \frac{1}{u_{1,\alpha}}\, \mathrm{grad}\, u_{1,\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Si les deux corpuscules sont fondus, il y a réduction de certains termes.

Manuscrit reçu le 16 mars 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Aeschlimann (F.), Onde moyenne d'un système de corpuscules en théorie fonctionnelle. *J. Physique Rad.*, 1959, **20**, 927-932.

[2] Broglie (Louis de), *J. Physique Rad.*, 1927, **8**, 225-241. La physique quantique restera-t-elle indéterministe ? (Gauthier-Villars, Paris, 1953).

[3] Aeschlimann (F.), Sur les systèmes de corpuscules en théorie fonctionnelle non relativiste. *J. Physique Rad.*, 1959, **20**, 730-735.

[4] Destouches (J. L.), Corpuscules et champs en théorie fonctionnelle (Gauthier-Villars, Paris, 1958).

OBSERVATION MICROSCOPIQUE DU SULFURE DE CADMIUM BOMBARDÉ PAR DES ÉLECTRONS DE 5 keV

Par François DAVOINE, Pierre PINARD,
Institut National des Sciences Appliquées, Département de Physique, Lyon.
et Michel MARTINEAU,
École Polytechnique, Laboratoire de Physique.

Résumé. — La technique de microscopie par balayage, appliquée à l'étude de la cathodoluminescence d'un cristal de sulfure de cadmium conduit à deux résultats importants :

Seules, certaines régions du cristal (celles où la concentration en défauts primaires est élevée) participent à l'émission lumineuse.

Dans le domaine spectral exploré (de 3 000 à 6 000 Å) certaines de ces zones émettent plusieurs longueurs d'onde alors que d'autres ont une réponse monochromatique.

Abstract. — Scanning microscopy, used to investigate cathodoluminescence of a CdS crystal. leads to two important results :

Only some parts of the crystal are luminescent (those where concentration of primary defects is high).

In the spectral region explored (from 3 000 to 6 000 Å) emission from some of these zones is polychromatic whereas others emit one wave length only.

Description du dispositif expérimental utilisé. — Comme nous l'avons exposé dans des publications antérieures [1], [2] nous avons fait subir à un microscope à balayage classique des modifications permettant de réaliser l'image d'une surface bombardée par des électrons, non plus au moyen d'électrons secondaires ou réfléchis issus de cette surface, mais grâce aux photons engendrés par cathodoluminescence.

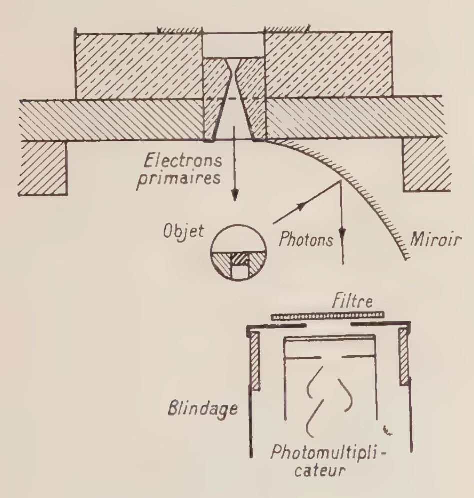


Fig. 1.

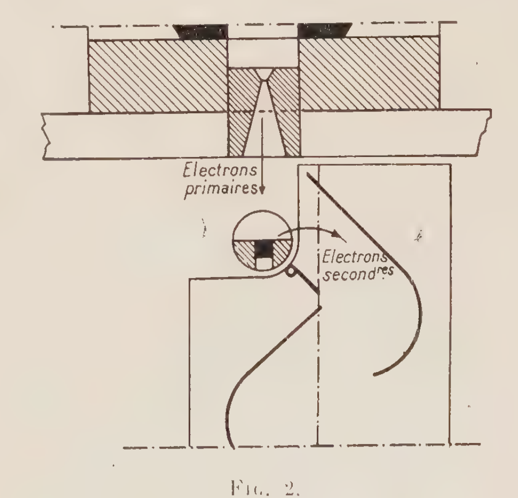


Fig. 2.

Pour cela, à l'aide d'un miroir concave, on envoie sur la photocathode d'un photomultiplicateur d'électrons la lumière émise par l'objet soumis à l'impact d'un faisceau électronique fin accéléré sous 5 000 volts (*fig.* 1). Ce pinceau analyseur étant animé d'un mouvement de balayage en lignes et images, le multiplicateur fournit, à chaque instant, un signal proportionnel à l'intensité lumineuse du point de l'échantillon frappé par les électrons. Après amplification, on utilise ce signal pour moduler le faisceau d'un tube cathodique dont le balayage est synchronisé avec celui de la sonde Cette dernière balayant une surface carrée de quelques dixièmes de millimètres de côté, et l'écran du cathoscope étant utilisé sur une surface d'environ 10 cm × 10 cm on obtient ainsi une image agrandie de la surface bombardée.

De plus, l'interposition de filtres au-dessus de la photocathode permet, dans la formation de l'image,

de sélectionner les longueurs d'onde émises par l'échantillon. La réponse du photomultiplicateur utilisé (51 AVP Radiotechnique) n'est, pas la même pour toutes les longueurs d'onde, mais, si sa sensibilité présente un maximum vers 4 200 Å, elle demeure encore importante aussi bien vers 3 000 Å que vers 6 000 Å (*fig.* 3).

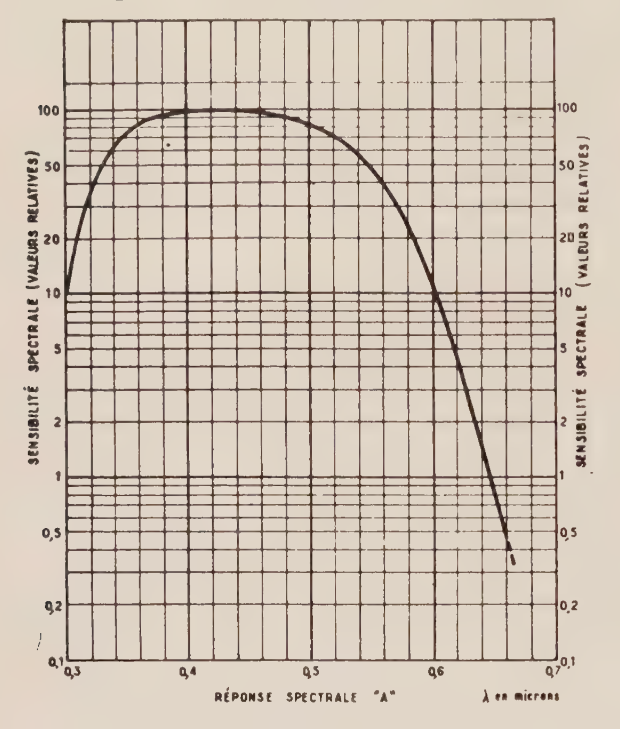


Fig. 3.

L'emploi d'un autre photomultiplicateur permettrait évidemment d'étendre le champ d'application de cette technique soit vers les longueurs d'onde plus courtes, soit vers les infra-rouges.

La cathodoluminescence présentant, généralement, une rémanence plus ou moins marquée, les vitesses de balayage ont été choisies suffisamment lentes pour que les images soient nettes et ne donnent lieu à aucun phénomène de « traînage » pourvu que l'énergie lumineuse émise par l'objet soit réduite au 1/10 de sa valeur en 100 μS. Enfin, en substituant au photomultiplicateur un multiplicateur d'électrons ouvert (*fig.* 2), il est aisé de revenir au microscope à balayage initial [3], [4].

L'ensemble de ce dispositif permet donc de comparer, pour une même portion de surface, les images obtenues par émission électronique d'une part, et par cathodoluminescence dans un domaine défini de longueurs d'onde, d'autre part. Cette technique a été appliquée à l'observation de cristaux de sulfure de cadmium.

Résultats obtenus. — Nous avons utilisé des filtres de bande passante déterminée. La figure 4 donne le facteur de transmission de chacun d'eux en fonction de la longueur d'onde. (Ces courbes ont été relevées au spectromètre enregistreur Lerès.)

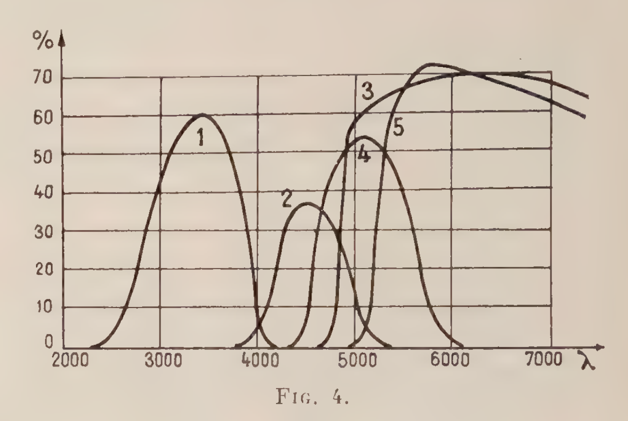


Fig. 4.

La figure 5 représente le cliché obtenu en utilisant la totalité de l'émission lumineuse d'une petite surface d'un cristal de sulfure de cadmium.

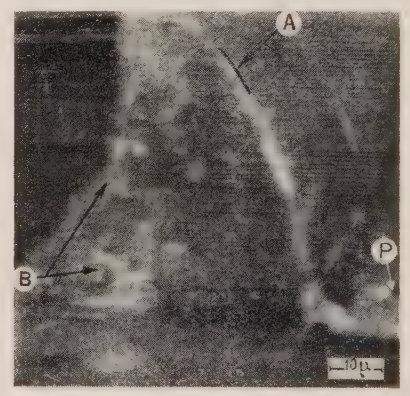


Fig. 5.

Les images réalisées en sélectionnant, au moyen des filtres, les photons émis par cette surface sont rassemblées figure 6.

Enfin, la figure 7 est une image de la même région obtenue par émission électronique.

Une objection s'impose toutefois : l'émission lumineuse détectée n'est-elle pas due, non à la cathodoluminescence propre de l'objet, mais à la fluorescence du verre constituant le miroir, le filtre ou la photocathode lorsque ces éléments sont frappés par les électrons réfléchis ? Afin d'écarter cette hypothèse nous avons tenté d'obtenir, avec le photomultiplicateur, l'image d'une surface d'or recuit. Un tel échantillon émet une quantité importante d'électrons secondaires ou réfléchis comme le prouve l'image obtenue (*fig.* 8) avec le multiplicateur ouvert (dispositif de la figure 2).

Si, avec le photomultiplicateur, le processus de formation de l'image était celui présumé ci-dessus, on devrait obtenir, au moyen du dispositif de la

a) filtre n° 1 *b*) filtre n° 2 *c*) filtre n° 3

d) filtre n° 4 *e*) filtre n° 5.

Fig. 6.

figure 1 une image de cet objet. L'expérience, plusieurs fois répétée, a toujours été négative. Une surface, même très fortement réfléchissante pour des électrons primaires ne donne aucune image si elle n'est pas, elle-même, le siège de phénomènes de luminescence.

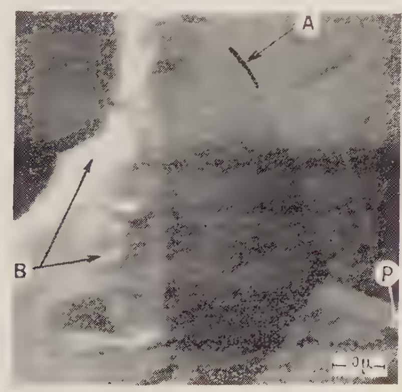


Fig. 7.



Fig. 8.

Discussion des résultats. — La série de clichés présentée ci-dessus, montre tout d'abord que l'émission lumineuse superficielle n'est pas uniforme, mais localisée en certaines zones très bien délimitées. Ces zones, qui apparaissent claires sur nos images, semblent relativement étendues, mais le pouvoir séparateur actuel de notre instrument ne nous permet pas de préciser si, en fait, cette émission n'est pas liée à la présence de multiples défauts cristallins primaires (lacunes, atomes déplacés etc...).

Nous pouvons simplement tirer quelques renseignements de la comparaison des clichés de cathodoluminescence et d'émission électronique. Sur l'image obtenue par émission électronique (fig. 7) apparaissent nettement des contrastes qui trouvent leur origine dans deux causes essentielles [3] : — le relief ; — l'orientation cristalline en surface.

On distingue, en particulier, en A, la séparation de deux domaines d'orientation différente (l'émission électronique n'est pas la même de part et d'autre de la ligne tracée). Cette transition s'effectue sans accident de relief. Nous pensons qu'il s'agit là d'une sous-structure. Par contre, la région repérée B correspond à une zone où les irrégularités superficielles sont importantes.

Précisément, les domaines A et B se révèlent comme particulièrement actifs en ce qui concerne la cathodoluminescence (*fig.* 5). Du point de vue cristallin, la région B possède une concentration importante en imperfections par suite de la désorganisation poussée du réseau. Quant à la zone A, la modification brutale du plan cristallin superficiel qui la caractérise s'accompagne de l'apparition de défauts primaires, d'autant plus que le sulfure de cadmium observé, destiné à des études de photoconductivité [5] contient des traces de cuivre volontairement introduites : il est alors logique de penser que les atomes étrangers se placent préférentiellement aux points où le réseau cristallin tend à se modifier. De toute manière, cette liaison entre cathodoluminescence et imperfections cristallines demande à être vérifiée directement et nous nous proposons de le faire par différentes méthodes.

Outre la localisation de l'effet observé, notre technique, associée à l'emploi des filtres, nous a conduits à constater que les différentes régions luminescentes ne se comportent pas strictement de la même manière : Certaines émettent des radiations dans une large bande de longueurs d'onde. D'autres, au contraire, n'émettent que dans un domaine spectral bien déterminé.

Il faut tout d'abord noter que les intensités des images 6*a* à 6*e* ne sont pas parfaitement comparables, l'absorption des filtres variant de l'un à l'autre et la réponse du photomultiplicateur dépendant de la longueur d'onde. Néanmoins, on constate sur ces clichés que la zone B, par exemple, apparaît quel que soit le filtre interposé. Au contraire, la région A n'est pas visible sur la photographie 6*a* ; très faiblement marquée sur 6*b* elle est fort intense sur 6*c* et 6*d* pour tendre ensuite à disparaitre sur 6*e*.

Les courbes de la figure 4 permettent de préciser que, dans ces conditions, l'émission lumineuse correspondante doit se situer entre 5 100 et 5 500 Å. Ce résultat est en excellent accord avec les observations de Bleil, Snyder et Shivonen [6] qui ont trouvé, pour le sulfure de cadmium frappé par un pinceau électronique d'intensité spécifique élevée, un pic d'émission vers 5 200 Å.

La tache claire repérée P sur la figure 5 constitue aussi une zone intéressante. Très brillante en 6*a* elle apparaît à peine en 6*b* et elle demeure totalement imperceptible en 6*c*, 6*d* et 6*e*. Ceci caractérise une émission dans l'ultra-violet, aux environs de 3 800 Å. On peut remarquer encore que cette tache doit correspondre à une irrégularité superficielle que l'on distingue sur le cliché d'émission électronique.

Nous tenons à remercier M. le Pr Janin qui a bien voulu mettre à notre disposition une série de filtres soigneusement étalonnés et M. Boisot, maître de Conférences à l'École Polytechnique qui nous a fourni les cristaux de sulfure de cadmium.

Manuscrit reçu le 28 octobre 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bernard (R.), Davoine (F.) et Pinard (P.), *C. R. Acad. Sc.*, 1959, **248**, 2564-2566.
[2] Davoine (F.) et Pinard (P.), Communication à la Société française de Physique (Section du Sud-Est), 20 mars 1959, *J. Physique Rad.*, 1959, **10**, 63 S.
[3] Davoine (F.), *Thèse*, Lyon, 1958.
[4] Bernard (R.) et Davoine (F.), *Ann. Univ. Lyon*, 3e série B, 1957, 78-86.
[5] Peironet (P.), Fouche (M.) et Martineau (M.), *C. R. Acad. Sc.*, 1958, **246**, 1572.
[6] Bleil (C. N.), Snyder (D. D.) et Shivonen (Y. T.), *Phys. Rev.*, 1958, **111**, 1521.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM

TOME 21, FÉVRIER 1960, PAGE 125.

DÉTERMINATION DES SECTIONS EFFICACES DE LA RÉACTION D + D = p + T + 4,03 MeV A DES ÉNERGIES INFÉRIEURES A 15 keV

Par Mme D. MAGNAC-VALETTE, E. LACOMBE, R. BILWES et P. CÜER,

Laboratoire de Physique corpusculaire, Faculté des Sciences, Strasbonrg.

Résumé. — Nous donnons ici des valeurs de la section efficace de la réaction D + D → p + T au-dessous de 15 MeV au moyen d'une cible épaisse dans laquelle le deutérium est occlus. La connaissance de ces sections efficaces est nécessaire dans les calculs thermonucléaires.

Abstract. — Values of the cross sections of the reaction D + D → p + T are measured below 15 MeV with a thick target containing absorbed deuterium. These cross sections are necessary in thermonuclear calculations.

Il est important, dans le calcul de l'évolution des mélanges thermonucléaires de connaître avec précision les sections efficaces pour le calcul des coefficients $< \sigma v >$.

Avant ce travail, le dernier point expérimental connu de la réaction précédente était à 14,4 keV [1]. A des énergies inférieures, la mesure présente de grosses difficultés. Celles d'Arnold et Tuck (en cible gazeuse avec fenêtre très mince, donc à faible intensité) devenait pratiquement impossible, le nombre d'événements comptés étant trop faible.

Nous avons construit spécialement pour cette mesure, un petit accélérateur de deutérons à basse tension et gros débit [2].

Nous avons utilisé un courant d'environ 1 mA et une cible épaisse de laiton fixée à 45° du faisceau incident et dans laquelle le deutérium est absorbé. Elle est refroidie par un courant d'eau. Le détecteur est l'émulsion photographique Ilford E_1 de 50 μ, placée à 90° du faisceau incident dans un angle solide de 0,016 stéradians.

Les deutérons réfléchis et les tritons de la réaction sont coupés par une fenêtre d'aluminium de 20 μ. Les particules émises mesurées sont les protons. Comme on les compte, leur longueur de parcours n'a pas besoin d'être connue avec précision ni, partant, l'épaisseur de la fenêtre.

La difficulté des mesures à basse énergie vient de la composition du faisceau incident (courant neutre ou chargé), mais, nous le verrons ci-dessous, cette difficulté sera éliminée en prenant pour I effectif un nombre proportionnel à I mesuré dans un domaine d'énergie limité, le coefficient de proportionnalité pouvant rester inconnu. La deuxième difficulté vient de la cible dont on ne connaît pas la composition (M nombre d'atomes cibles par cm³), et la troisième, de la connaissance de la perte d'énergie dans la cible $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$. D'autre part, la cible étant épaisse, nous mesurons à l'énergie E la contribution de toutes les sections efficaces, allant de l'énergie 0 à l'énergie E.

Soit ΔN le nombre de protons émis dans l'angle solide 4π. Nous mesurons en réalité, le nombre de protons émis dans l'angle solide à 90°. En faisant une correction d'anisotropie qu'on peut estimer d'après les expériences à des énergies plus élevées on peut calculer $\mathrm{d}N$. Soit $\mathrm{d}N$ le nombre de protons émis dans 4π pour une énergie donnée E

$$\Delta N = \int_0^E \mathrm{d}N = \int_0^{x_E} \sigma_E \, NM \, \mathrm{d}x \tag{1}$$

$$\Delta N = \int_0^E \sigma_E \, NM \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}E} \mathrm{d}E. \tag{2}$$

N, le nombre de protons incidents, est proportionnel à la durée de l'expérience et à I mesuré.

$$N \quad kIt.$$

Nous avons vérifié que nous avions bien saturation de la cible à énergie donnée :

$M(\mathrm{d}x/\mathrm{d}E)$ et donc M restent constants, quels que soient I et t, à température constante (qui est celle de l'eau de refroidissement).

Nous avons ensuite ramené tous nos résultats à une même valeur de It, ce qui nous donne

$$N = \text{constante}.$$

En dérivant l'équation (2) sous le signe « somme » nous obtenons dans un intervalle d'énergie donné infiniment petit $\mathrm{d}E$:

$$\mathrm{d}(\Delta N)/\mathrm{d}E = \sigma_E \, NM \, \mathrm{d}x/\mathrm{d}E.$$

Nous traçons donc la courbe dérivée de $N = f(E)$.

Dans la région de 25 à 15 keV, nous connaissons σ_E d'après les résultats antérieurs [1]. Nous pouvons donc en déduire $NM \, \mathrm{d}x/\mathrm{d}E$ en fonction de E. Nons avons constaté que cette fonction variait en

raison inverse de E comme le montre le tableau ci-dessous.

E keV	$\frac{d(\Delta N)}{dE}$	σ en 10^{-6} barns	$k = \frac{E}{\sigma}\frac{d(\Delta N)}{dE}$ en 10^6 barns^{-1} coulombs^{-1}	
25	11 666	629	463	426 ± 6
22	8 000	392	450	
19	5 267	213	470	
15	2 467	79	466	

Nous avons extrapolé ce résultat aux valeurs inférieures de E sans chercher à l'interpréter, car nous ne connaissons rien sur l'occlusion du deutérium dans une cible sous l'effet d'un faisceau de particules. Si on admet avec Fermi-Teller [3] et Warshaw [4], qu'aux très basses énergies, le pouvoir d'arrêt — dE/dx varie avec $\sqrt{E}$, ceci signifie que pour des intervalles d'énergie très petits et égaux, M varie comme $1/\sqrt{E}$.

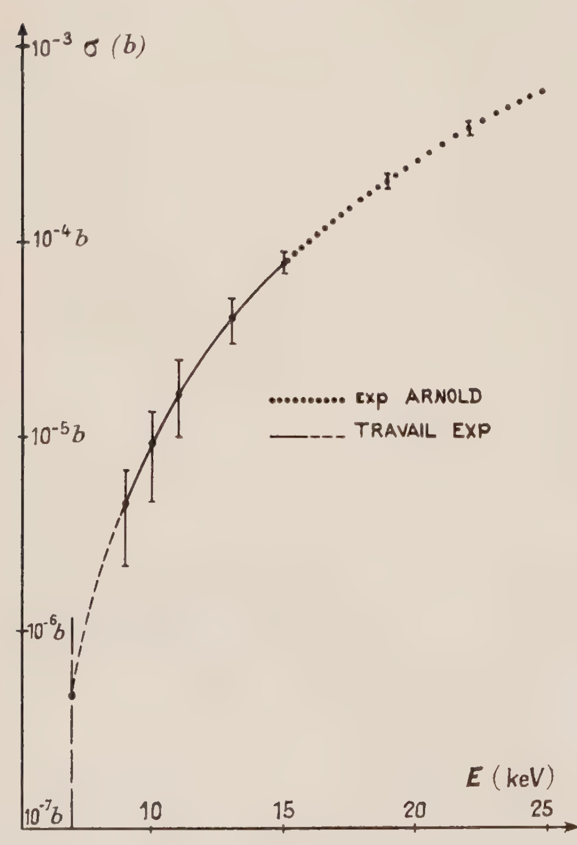


Fig. 1. — Courbe des sections efficaces,

Cette hypothèse nous a permis d'évaluer σ de 15 à 7 keV.

Pour la même valeur de N que dans le tableau précédent :

E keV	$\frac{d(\Delta N)}{dE}$	σ en 10^{-6} barns	k
13	1 467	41	
11	733	17	
10	400	9	426 ± 6
9	200	4	
7	33	0,5	

Comme on le voit, notre hypothèse sur la constance de k est vérifiée à moins de 1,5 % entre 25 et 15 keV ; 1,5 % étant largement inférieur aux erreurs expérimentales supposées.

Erreurs sur σ :

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{\Delta\left[\frac{d(\Delta N)}{dE}\right]}{\frac{d(\Delta N)}{dE}} + \frac{\Delta N}{N} + \frac{\Delta E}{E} + \frac{\Delta k}{k}.$$

Pour déterminer $d(\Delta N)$, nous faisons une erreur due au passage de la courbe intégrale à la courbe différentielle et une erreur due à la statistique faible. Ces erreurs sont de beaucoup les plus importantes.

Les erreurs provenant de la variation supposée de M sont comprises dans l'erreur sur k :

E	13 keV	9 keV	7 keV
Erreur relative sur $\frac{d(\Delta N)}{dE}$	10 %	20 %	60 %
Erreur relative sur N (Lecture et intégration du courant ainsi que la variation de composition du faisceau)	2,5 %	2,5 %	4 %
Erreur relative sur k (Erreur expérimentale pour les points entre 15 et et keV)	1,5 %	1,5 %	1,5 %
Erreur relative sur E	2 %	2 %	2 %
Total	16 %	26 %	68 %

La valeur à 7 keV est donnée à titre d'indication (0,5 ± 0,4) 10^{-6} barns.

Manuscrit reçu le 26 octobre 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Arnold, Phillips, Sawyer, Stovall et Tuck, *Phys. Rev.*, 1954, **93**, 483.
[2] Bilwes (R.), Seltz (R.), Suffert (M.), Liess (M.), Nehlig (J. J.) et Magnac-Valette (D.), *J. Physique Rad.*, 1958, **19**, 183.
[3] Fermi (E.) et Teller, *Phys. Rev.*, 1947, **72**, 399.
[4] Warshaw (S. D.), *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 1759.

SUR LES BANDES D'ÉMISSION VERTE ET BLEUE DE ZnS (Cu)

Par Mme G. CURIE et D. CURIE,
Laboratoire de Luminescence, Faculté des Sciences de Paris.

Résumé. — On suggère que le même état fondamental intervient, au moins à titre de première approximation, dans les « centres bleus » et les « centres verts » de ZnS(Cu). Le quantum lumineux émis dépendrait de la nature du niveau excité, « associé » à ce niveau fondamental, à partir duquel s'effectue la transition. L'argument expérimental le plus net en faveur de ce modèle résulte de l'étude de l'électroluminescence.

Abstract. — It is suggested, at least as a first approximation, that the same fundamental level plays its part in both the " blue centres " and " green centres " of ZnS(Cu). The emitted light quantum depends on the excited level " associated " with the fundamental level ; the transition occurs between these two states. Experimental arguments are given supporting this model, especially resulting from electroluminescence studies.

1. On sait que dans ZnS, l'introduction de l'activateur cuivre fait apparaître dans le visible deux bandes d'émission luminescente :

	BANDE VERTE	BANDE BLEUE
ZnS wurtzite (« gap » = 3,70 eV)	5 230 Å	4 450 Å
ZnS blende (« gap » = 3,64 eV)	5 350 Å	4 600 Å

Pour interpréter l'existence de ces deux bandes on a tout naturellement supposé l'existence de « centres cuivre verts » et de « centres cuivre bleus » (*fig.* 1).

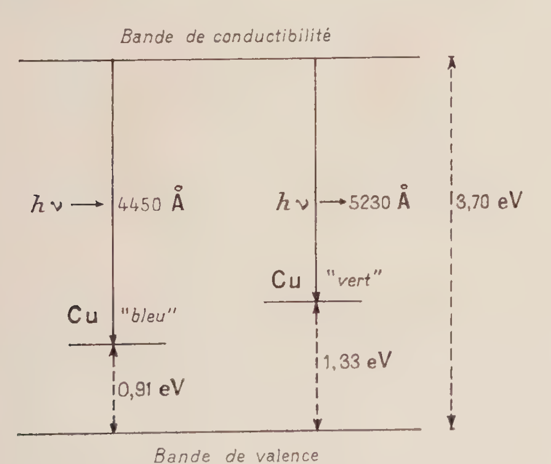


FIG. 1. — Position des niveaux intervenant dans l'émission due aux centres luminogènes Cu dans ZnS (wurtzite). Représentation habituelle : on admet que l'émission lumineuse intervient lors de la rentrée d'un électron de conductibilité dans le centre vide.

Mais, autant cette hypothèse était normale lorsqu'on pouvait envisager l'intervention du cuivre sous deux états de valence différente (par exemple : Cu^{++} et Cu^{+}), autant elle paraît difficile à justifier depuis que Bowers et Melamed [1] ont montré que le cuivre s'introduit uniquement sous la forme diamagnétique Cu^{+} (voir aussi [2]) : les deux états Cu^{++} et Cu^{o} sont à éliminer parce que conduisant à un paramagnétisme non confirmé par l'expérience.

2. Bien qu'on en soit encore réduit aux hypothèses sur la nature de la liaison dans ZnS ([1]), on peut déjà accepter certaines conclusions, qui paraissent indépendantes du modèle admis pour ZnS Presque tous les auteurs sont d'accord pour admettre que le cuivre introduit dans la bande inter-

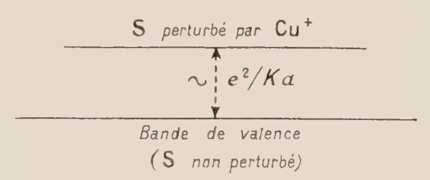


FIG. 2. — Le niveau fondamental du centre Cu^{+} selon Klasens [6].
La hauteur du niveau localisé ainsi introduit par Cu^{+} est d'environ
$e^2/Ka = 0,74$ eV au-dessus de la bande de valence :
$K = 8,3$ constante diélectrique du sulfure,
$a = 2,35$ Å distance entre ions voisins dans le réseau.

([1]) ZnS peut être rangé en première approximation parmi les cristaux ioniques, puisque les constantes diélectrique statique $K = 8,3$ et en haute fréquence $K_0 = 5,07$ y sont différentes. Mais la structure tétraédrique du réseau y favorise l'apparition d'un caractère covalent de la liaison (F. E. Williams [3]). D. Curie [4] a proposé d'admettre un pourcentage de liaison ionique de 75 %. Il serait alors permis de figurer les niveaux d'énergie en considérant en première approximation le cristal comme purement ionique, mais le caractère covalent jouerait un rôle essentiel dans les probabilités de transition.

dite un niveau situé à quelques dixièmes d'électron-volt au-dessus de la bande de valence ([2]).

On obtient cette conclusion aussi bien avec un modèle purement ionique $Zn^{++}S^{--}$ [Klasens [6] : remplacer un Zn^{++} par un Cu^{+} diminue la liaison pour les ions soufre voisins, augmentant l'énergie électrostatique des électrons sur ces ions] qu'avec un modèle purement covalent [Williams [3] : le remplacement du zinc ($Z = 30$) par le cuivre ($Z = 29$) ne permet de compléter que 3 des 4 liaisons tétraédriques autour du site zinc, d'où un niveau accepteur se laissant décrire par le modèle hydrogénoïde].

3. On peut interpréter, semble-t-il, les faits expérimentaux actuellement connus en supposant que *le même niveau fondamental, décrit ci-dessus, intervient aussi bien lors de l'émission bleue que de l'émission verte.* Mais l'émission bleue serait due à la recombinaison directe d'un électron situé au bas de la bande de conductibilité (ou sur un niveau très peu profond) avec un trou situé dans l'état fondamental, tandis que l'émission verte aurait lieu après capture par un niveau excité plus profond (*fig.* 3).

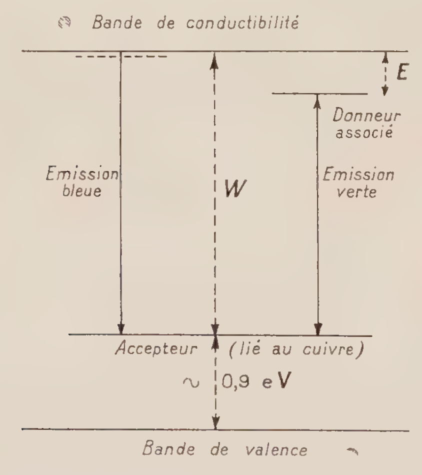


Fig. 3. — Modèle proposé. W est l'énergie nécessaire à l'ionisation du centre, en électroluminescence.

On peut envisager avec F. E. Williams ce niveau excité comme un niveau donneur, introduit par exemple par un coactivateur tel que Cl, Br, I *associé* à l'accepteur cuivre [3]. Un ion oxygène remplaçant l'halogène associé paraît jouer le même rôle, et de fait favorise aussi l'émission verte [7].

Ce modèle, suggéré par les idées actuelles (§ 2) sur l'intervention du cuivre dans ZnS, doit évidemment être proposé avec les réserves qui s'imposent alors qu'on ne sait actuellement pas décrire exactement même le ZnS pur. Mais, à l'appui du modèle :

a) La profondeur E du donneur doit être sensiblement celle d'un piège à électrons, soit 0,3 eV — ce qui est bien de l'ordre de la différence d'énergie entre les quanta lumineux émis verts et bleus, 0,4 eV environ.

b) Les mêmes photons infra-rouges doivent produire parallèlement l'extinction de la bande bleue et de la bande verte, en bouchant l'état fondamental du centre par activation optique d'un électron de la bande de valence — la similitude des spectres d'extinction des deux bandes a été signalée par P. F. Browne [8].

c) Le fait bien connu que la bande bleue s'éteint par élévation de température plus tôt que la bande verte, invoqué dans la théorie des transferts pour figurer le centre bleu plus bas que le centre vert, peut aussi s'expliquer dans le modèle proposé en remarquant qu'il y a extinction thermique lorsque l'électron capturé sur le niveau excité du centre se trouve libéré dans la bande de conductibilité avant que la transition radiative ait eu lieu : ce renvoi dans la bande de conductibilité se produit à plus basse température pour l'électron à la veille d'émettre la bande bleue, lequel se trouve sur un niveau très voisin du bas de la bande de conductibilité, que pour l'électron à la veille d'émettre la bande verte, lequel se trouve capturé par le donneur associé comme il le serait par un piège ([3]).

d) *En électroluminescence*, on devrait observer, s'il existait réellement des « centres cuivre verts » et des « centres cuivre bleus » différents, des changements de couleur d'une cellule à ZnS(Cu) lorsque la tension appliquée varie, analogues à ceux que l'on observe dans le cas des cellules à plusieurs activateurs ZnS(Cu, Mn) : au contraire il n'y a pas de tels changements [9] ([4]).

Or on admet, pour la luminance de la cellule sous l'action du champ appliqué $\boldsymbol{E}$, l'expression :

$$L : \exp\left(-\frac{W}{e x_m \boldsymbol{E}}\right)$$

e charge de l'électron, x_m libre parcours moyen, W énergie nécessaire pour exciter ou ioniser le centre luminogène. Si l'on assimile W au quantum

([2]) Voir cependant Lambe et Klick [5].

([3]) Il n'est pas exclu qu'il se produise en outre les transitions d'activation thermique d'un électron de la bande de valence venant boucher le centre luminogène, analogues à celles qui se produisent par activation optique lors de l'extinction infra-rouge.

([4]) Au laboratoire, J. Mattler et T. Céva effectuent actuellement une étude précise de la forme des spectres d'émission obtenus sur différents sulfures électroluminescents, avec un ou plusieurs activateurs, lorsque varient la tension, la fréquence et la température. Sur ZnS(Cu) possédant les deux bandes d'émission verte et bleue, l'invariance envers la tension du rapport de la hauteur des deux bandes est remarquablement bien vérifiée.

lumineux émis, comme sur le schéma usuel de la figure 1, l'on prévoit que la luminescence de la bande bleue doit augmenter plus vite avec la tension que celle de la bande verte, ce qui est contraire à l'expérience. Si par contre on assimile W à la distance du centre au bas de la bande de conductibilité, l'expérience conduit à la même valeur de W pour les deux bandes d'émission, c'est-à-dire au schéma proposé ici.

Manuscrit reçu le 20 novembre 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bowers (R.) et Melamed (N. T.), *Phys. Rev.*, 1955, **99**, 1781.
[2] Klick (C. C.) et Schulman (J. H.), *Phys. Rev.*, 1956, **104**, 548.
[3] Williams (F. E.) et Prener (J. S.), *Phys. Rev.*, 1956, **101**, 1427 ; *J. Electrochem. Soc.*, 1956, **103**, 342 ; *J. Physique Rad.*, 1956, **17**, 667.
[4] Curie (D.), *J. Physique Rad.*, 1956, **17**, 670.
[5] Lambe (J.) et Klick (C. C.), *Phys. Rev.*, 1955, **98**, 909 ; *J. Physique Rad.*, 1956, **17**, 663.
[6] Klasens (H. A.), *J. Electrochem. Soc*, 1953, **100**, 72.
[7] Grillot (E.), *J. Physique Rad.*, 1956, **17**, 624.
[8] Browne (P. F.), *J. Electronics*, 1956, **2**, 12.
[9] Destriau (G.) et Ivey (H. F.), *P. I. R. E.*, 1955, **43**, 1920.

REVUE DES LIVRES

Farley (J. M.), **Notions sur les circuits d'impulsion** (traduit de l'anglais par D. Guinier). 1 vol. 11 × 16 cm, relié, 162 pages, 75 figures, Dunod, Paris, 8,80 NF.

Ce petit livre, d'un niveau très élémentaire, s'adresse aux techniciens non spécialisés, mais familiarisés avec l'emploi des tubes électroniques dans les amplificateurs classiques. Il contient un exposé sans calculs des principes de fonctionnement des principaux circuits d'impulsion et constitue une bonne introduction à une étude plus poussée.

L'intégration et la dérivation d'une tension par rapport au temps, l'étude des circuits contenant des diodes ou des tubes amplificateurs en régime linéaire font l'objet des deux premiers chapitres. Les trois suivants sont consacrés à la production des impulsions carrées (multivibrateurs et dérivés, oscillateurs à blocage) aux circuits de déclenchement et aux bascules (Ecclès-Jordan, bascule de Schmidt, univibrateur, bascule « bootstrap » et transitron) et enfin aux aux bases de temps, c'est-à-dire à la production des signaux en dents de scie. Le chapitre suivant traite de l'amplification des impulsions (élargissement de la bande passante, blocage) et le dernier rassemble des exemples précis d'applications.

L'ensemble du livre est illustré de nombreux schémas de principe, et, dans les derniers chapitres principalement, de quelques schémas complets avec noms des tubes, valeurs des résistances et tensions.

P. Laurenceau.

Vassy (E.), **Physique de l'atmosphère** : II, **Phénomènes de réfraction.** (1 vol., 24 × 15,5 cm, 227 pages, 159 figures, Gauthier-Villars, Paris, 32 NF.)

Suite de la publication du Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris par le Pr Vassy, commencée en 1956 par un premier volume sur les phénomènes d'émission.

Celui-ci traite de la réfraction de toutes les sortes d'ondes, lumineuses, hertziennes et sonores.

Le chapitre I est consacré aux aspects généraux de la réfraction de la lumière. Il étudie d'abord la réfraction astronomique, l'établissement des tables de correction, et les effets aisément observables du phénomène (aspects du soleil et de la lune, rayon vert). Vient ensuite la réfraction terrestre, son application à la géodésie (détermination du facteur K_0) et ses aspects exceptionnels (mirages supérieurs et inférieurs, latéraux, irréguliers), enfin la scintillation, et les renseignements qu'elle peut donner sur la structure fine de l'atmosphère.

Le chapitre II traite des phénomènes optiques dûs aux réflexions et réfractions par les gouttelettes d'eau et cristaux de glace en suspension dans l'air : arcs-en-ciel, halos, cercles parhéliques, colonnes, etc... Leur variété et leur étrangeté sont telles que l'on comprend comment des observateurs peu avertis ont pu les croire miraculeux.

Les chapitres III et IV étudient la propagation des ondes radioélectriques dans la troposphère et dans l'ionosphère. On sait l'importance scientifique et pratique du sujet : le livre de M. Vassy en donne une intéressante mise au point, que complètera le volume suivant, consacré à l'ionisation de la haute atmosphère. Le présent livre donne déjà, pour la troposphère, l'application des équations de Maxwell à la propagation normale, l'influence des différentes variables (pression, température, humidité) sur l'indice de réfraction et le calcul classique des trajectoires, en particulier pour les ondes très courtes, d'origine tant terrestre qu'extra-terrestre. Pour l'ionosphère, l'auteur, après avoir fait l'étude de la propagation des ondes, l'applique à l'exploration du milieu et aux télécommunications.

Le chapitre V, et dernier, expose d'abord rapidement la théorie de la propagation du son, et quelques indications sur son absorption, puis les méthodes et les résultats expérimentaux de l'écoute, l'un des premiers moyens d'étude physique de l'atmosphère.

Ce cours est évidemment destiné aux étudiants, mais il intéressera tous les physiciens, les radio-électriciens, et en général les lecteurs de culture scientifique suffisante (niveau de la licence), curieux de l'explication des grands phénomènes naturels.

J. L.

EXPOSÉ ET MISE AU POINT BIBLIOGRAPHIQUE

INFLUENCE DE LA PRESSION SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES SEMICONDUCTEURS

Par Jean ROBIN,
Faculté des Sciences de Dakar (Sénégal).

Résumé. — Nous résumons les principaux travaux relatifs à l'influence de pressions élevées sur quelques propriétés de certains semiconducteurs telles que la conductibilité électrique, la résistance de la jonction *p-n* et le bord d'absorption de la bande fondamentale. Cette influence se traduit par une variation de la largeur de la bande interdite, parfois accompagnée du changement des mobilités des électrons et des trous.

Abstract. — We summarize the principal work relative to the pressure dependence of some properties of certain semiconductors such as the electrical conductivity, the resistivity of the *p-n* junction and the absorption edge of the fundamental band. This influence is indicted by the variation of the width of the energy gap sometimes accompanied by the change of the mobilities of electrons and holes.

Introduction

La structure des bandes de valence et de conduction des semiconducteurs étant fort complexe il est très difficile de prévoir théoriquement l'effet de la pression sur la largeur de la bande interdite. Nous avons pensé qu'un exposé des différents phénomènes observés sous pression serait susceptible à la fois d'attirer l'attention sur l'intérêt de ces recherches, de faciliter la documentation et par là même de favoriser les rapprochements entre les faits expérimentaux et les idées théoriques.

Après un rappel élémentaire de quelques propriétés caractéristiques, nous résumerons les principaux travaux qui ont été effectués par divers auteurs sur l'influence de la pression sur la résistivité intrinsèque de différents semiconducteurs ; cette influence se traduit surtout par une variation de la largeur E_g de la bande interdite avec la pression.

Nous donnerons ensuite un aperçu de deux autres procédés de détermination du coefficient de pression $(\partial E_g/\partial P)_T$: l'effet de la pression sur la résistivité de la jonction *p-n* et le déplacement du bord d'absorption avec la pression.

I. **Généralités.** — Voir par exemple [1 à 13].

A. Structure de bandes dans les cristaux. — La notion fondamentale de structure de l'atome, d'après la mécanique ondulatoire, est que l'électron lié à un noyau ne peut occuper qu'un nombre limité de niveaux d'énergie entre lesquels la probabilité de trouver l'électron est pratiquement nulle.

Si de l'infini on rapproche deux atomes identiques jusqu'à la distance d'équilibre qu'ils doivent avoir normalement dans la molécule qu'ils constituent, les nuages électroniques se recouvrent partiellement et chaque état d'énergie devient double. Le dédoublement est d'autant plus important que l'on considère des électrons plus éloignés du centre de l'atome. Les électrons externes, qui forment la liaison dans la molécule, sont appelés électrons de valence. Au-dessus des niveaux de valence il existe d'autres niveaux permis, non occupés : ce sont les niveaux d'excitation.

Si on approche un nombre N d'atomes identiques pour former un cristal, chaque niveau d'énergie de l'atome individuel devient une bande constituée par N niveaux permis. Comme souvent ce nombre N est très grand, les niveaux forment une bande d'énergie permise quasi-continue.

La bande occupée par les électrons de valence s'appelle la *bande de valence* et les bandes correspondant aux niveaux excités sont les *bandes de conduction*. Les bandes d'énergies permises sont généralement séparées par des intervalles d'énergie dans lesquels il n'y a pas de niveaux permis et qui sont appelés *bandes interdites*.

Isolants, conducteurs, semiconducteurs. — La théorie des bandes dans les cristaux permet de donner une interprétation des différences de conductibilité électrique des divers corps cristallisés.

Si la bande de valence est complètement remplie d'électrons et est séparée de la première bande de conduction par une bande interdite large, il ne peut y avoir d'interaction entre les électrons et le champ électrique appliqué, le cristal ne conduit pas l'électricité, c'est un *isolant*.

Dans les cas où la bande de valence est seulement partiellement remplie (par exemple pour les métaux

alcalins) et où la bande de valence et la première bande de conduction se recouvrent partiellement (par exemple pour les éléments de transition) il existe des niveaux d'énergie permis, libres, faisant suite aux niveaux occupés. En présence d'un champ externe les électrons peuvent acquérir, aux dépens de celui-ci, l'énergie nécessaire pour passer à des niveaux plus élevés. Dans le champ électrique ils peuvent ainsi conduire le courant. Ce sont des *conducteurs*.

Entre ces deux cas extrêmes il existe des corps pour lesquels la largeur de la bande interdite (entre bandes de valence et de conduction) est assez petite pour que quelques électrons (excités thermiquement ou par un champ extérieur) puissent passer dans la bande de conduction. Ces cristaux conduisent le courant électrique mais leur résistivité, par suite du faible nombre de porteurs, est beaucoup plus grande que pour les conducteurs. On les appelle des *semiconducteurs*. La bande interdite qui sépare la bande de valence de la première bande de conduction est généralement celle que l'on désigne par l'expression « la bande interdite ». La largeur de celle-ci, pour les semiconducteurs, est comprise entre environ 0,2 et quelques électron-volts.

B. Semiconducteurs. — 1° *Intrinsèques.* — Lorsque, par suite d'une influence externe (excitation thermique, champ électrique, rayonnement) un électron passe dans la bande de conduction, sa place libre, ou *trou*, dans la bande de valence se comporte comme une charge positive. Dans un champ électrique les trous se déplacent en sens inverse des électrons et contribuent à la conductibilité. Dans un semiconducteur pur, ou *intrinsèque*, le nombre des électrons est égal au nombre des trous.

2° *D'impuretés.* — Si on introduit dans un cristal semiconducteur une faible quantité d'impureté on peut obtenir d'après la nature de celle-ci deux sortes de semiconducteurs *d'impuretés*.

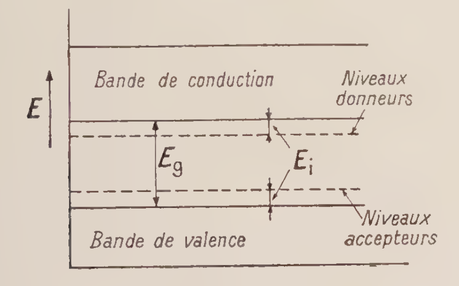


Fig. 1. — Niveaux d'impuretés dans un semiconducteur.

Si la valence de l'atome d'impureté est supérieure d'une unité à celle des atomes du semiconducteur, l'atome d'impureté a tendance à fournir un électron à la bande de conduction et il devient ionisé. On peut représenter l'état de base de l'impureté par un niveau d'énergie situé dans la bande interdite en dessous de la bande de conduction (voir *fig.* 1). Réciproquement, si la valence de l'atome d'impureté est inférieure de une unité à celle des atomes du semiconducteur, l'atome d'impureté a tendance à accepter un électron de la bande de valence, ce qui y crée un trou. Le niveau correspondant de l'impureté est situé à une faible distance au-dessus de la bande de valence.

Les atomes d'impuretés susceptibles de céder des électrons à la bande de conduction sont dits *donneurs* ; le semiconducteur obtenu a plus d'électrons de conductibilité que de trous : il est du *type n*.

Les atomes d'impuretés susceptibles d'accepter des électrons de la bande de valence sont dits *accepteurs* ; le semiconducteur obtenu a un excès de trous : il est alors du *type p*.

3° *Conductibilité en fonction de la température.* — La résistivité ρ des semiconducteurs (10^{-2} à 10^{9} Ω.cm) est intermédiaire entre celle des métaux bons conducteurs ($\sim 10^{-5}$ Ω.cm) et celle des isolants (10^{14} à 10^{22} Ω.cm). La différence entre les semiconducteurs et les métaux bons conducteurs est rendue plus évidente par examen de la variation de ρ avec la température.

Dans les métaux le nombre d'électrons transportant le courant électrique est indépendant de la température mais, par suite des vibrations du réseau qui augmentent avec la température, la mobilité des électrons diminue, ce qui donne un coefficient :

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT} > 0 \qquad (\rho \text{ étant la résistivité}).$$

Pour un semiconducteur, à partir du moment où la température devient suffisante pour donner lieu au passage d'électrons dans la bande de conduction, le nombre de porteurs croît exponentiellement avec la température. L'influence de l'augmentation du nombre de porteurs est grande par rapport à la diminution de leur mobilité due à l'effet de vibration des ions dans le réseau cristallin qui devient négligeable. Dans ce domaine de conductibilité intrinsèque on observe que la résistivité diminue quand T croît. Le logarithme de la résistivité est une fonction linéaire de $1/T$ (voir *fig.* 2) et :

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\rho}{dT} < 0.$$

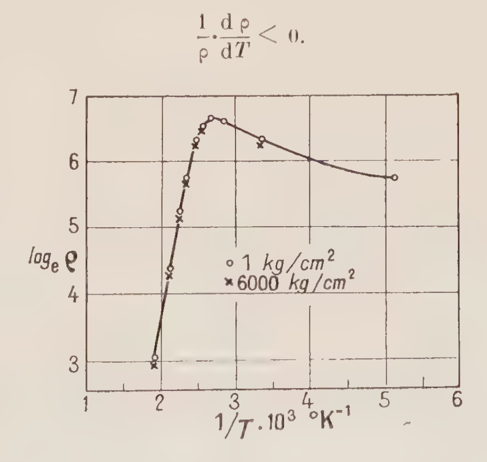


Fig. 2. — Logarithme de la résistivité en fonction de l'inverse de la température pour deux pressions différentes.

Au delà du domaine de la conductibilité intrinsèque, vers les températures plus basses, le nombre de porteurs est faible et presque constant ; il est dû en grande partie aux imperfections du réseau et aux traces d'impuretés ionisées. Dans ce domaine les vibrations des ions dans le réseau cristallin jouent un rôle pré-

pondérant dans la conductibilité et le coefficient $\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dT}$ peut changer de signe.

Dans les semiconducteurs, les trous et les électrons participant au transport du courant, la conductivité $\sigma = 1/\rho$ est représentée par :

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p)$$

e : charge de l'électron.

n et p : respectivement nombre d'électrons et de trous par cm^3.

μ_n et μ_p : mobilités des électrons et des trous (vitesse dans un champ électrique de 1 volt/cm).

Les expressions n et p sont obtenues comme solutions du produit de la fonction de densité d'états dans la bande de conduction et de la fonction de distribution de Fermi-Dirac. Pour un semiconducteur intrinsèque n est égal à p. Dans le cas général cela conduit à représenter σ par l'équation :

$$\sigma = e(\mu_n + \mu_p) \cdot 2 \left(\frac{2\pi \, kT}{h^2}\right)^{3/2} \cdot (m_n \cdot m_p)^{3/4} \cdot e^{-E_g/2kT}$$

m_n et m_p sont respectivement les masses effectives des électrons et des trous.

k = constante de Boltzmann.
h = constante de Planck.
T = température absolue.

d'où :

$$\rho = \frac{1}{e(\mu_n + \mu_p)} \cdot \frac{1}{2A} \cdot e^{E_g/2kT} \qquad (1)$$

avec

$$A = \left(\frac{2\pi \, kT}{h^2}\right)^{3/2} \cdot (m_n \cdot m_p)^{3/4}.$$

A partir de ces équations on voit que, en supposant les mobilités et les masses effectives constantes, le logarithme de ρ est bien une fonction linéaire de $1/T$.

II. Influence de la pression sur les semiconducteurs.

A) **Effets de la pression sur la résistivité.** — 1° Principe. — Si, à température constante, on soumet un cristal de semiconducteur à une pression hydrostatique P on constate que sa résistivité ρ varie. Cette variation est relativement faible en comparaison de l'influence de la température ainsi que le montre la figure 2 sur laquelle nous avons porté, pour un même cristal de silicium, les valeurs de $\log_e \rho$ en fonction de la température à deux pressions différentes 1 et 6 000 kg/cm².

Si on suppose qu'à température constante les masses effectives m_n et m_p ne varient pas, les seules quantités dans l'expression de ρ (équation 1) susceptibles d'être influencées par la pression sont la largeur de la bande interdite E_g et les mobilités (μ_n et μ_p). La plupart des travaux ont montré que les variations de μ_n et μ_p sont toujours faibles par rapport à celles de E_g et parfois négligeables. Les changements de ρ avec P sont donc principalement dus aux variations de la largeur E_g de la bande interdite. On peut poser l'équation thermodynamique suivante :

$$E_g^{P,T} = E_g^{0,0} + \int_0^P \left(\frac{\partial E_g}{\partial P}\right)_T dP + \int_0^T \left(\frac{\partial E_g}{dT}\right)_P dP. \qquad (2)$$

Pour une température constante T :

$$E_g^P = E_g^0 + \int_0^P \left(\frac{\partial E_g}{\partial P}\right)_T dP \qquad (3)$$

En portant (3) dans (1) nous avons :

$$\rho = \frac{1}{e(\mu_n + \mu_p)} \cdot \frac{1}{2A} \cdot e^{\left[E_g^0 + \int_0^P \left(\frac{\partial E_g}{\partial P}\right)_T dP\right]/2kT}$$

ce qui peut s'écrire :

$$\boxed{\log_e \rho = B + \int_0^P \left(\frac{\partial E_g}{\partial P}\right)_T dP/2kT}. \qquad (4)$$

Lorsque $\log_e \rho$ en fonction de P est représenté par une droite, B peut être considérée comme une quantité constante, ce qui revient à admettre que les mobilités ne varient pas de façon appréciable avec la pression.

Si au contraire on constate que la représentation de $\log_e \rho$ en fonction de P n'est pas linéaire, on admet que μ_n ou μ_p présentent des variations non négligeables avec la pression se traduisant par une variation de la quantité B.

Pour déterminer la variation de μ_n ou μ_p on opère dans le domaine de conductibilité extrinsèque, c'est-à-dire qu'on étudie la variation de ρ avec P dans le domaine où toutes les impuretés sont ionisées mais où l'énergie thermique n'est pas encore suffisante pour donner lieu aux transitions à travers la bande interdite. La conductibilité provient seulement des impuretés dont la concentration est constante. Les variations de E_g n'influencent pas dans ces conditions le changement de ρ avec P.

Si les impuretés sont du type n la conductibilité dans le domaine extrinsèque est :

$$\sigma = e \cdot \mu_n \cdot n.$$

Pour un échantillon p on a de même :

$$\sigma = e \cdot \mu_p \cdot p.$$

Les expériences se rapportant à de telles mesures, des mobilités montrent qu'en effet σ varie linéairement avec P par suite de la diminution de μ_n ou μ_p lorsque la pression augmente.

2° Résultats expérimentaux. — Nous ne ferons pas un exposé détaillé complet des divers travaux expérimentaux. Nous donnerons seulement ici une synthèse des résultats en essayant de concilier les divergences qui existent dans certains cas.

Les corps qui ont fait l'objet d'études sous pression sont surtout des corps cristallisant dans le système cubique type diamant (ou ZnS) : en particulier, Si, Ge et des semiconducteurs doubles tels que InAs, InSb, GaSb. Quelques études se rapportent également à d'autres cristaux qui cristallisent dans le système hexagonal, notamment au tellure.

Ces travaux ont été effectués à une température suffisamment élevée pour que les corps étudiés soient dans le domaine de conduction intrinsèque sauf en ce qui concerne les mesures de variation de mobilité.

A) *Cristaux du système cubique.* — Pour ceux-ci, mis à part le cas du silicium, les expérience montrent

que ρ augmente avec P, c'est-à-dire que la largeur de la zone interdite E_g croît avec la pression (*).

— Les résultats sur le germanium, qui a été étudié dans un domaine de pressions très étendu [14 à 22], se prêtent particulièrement bien à la représentation des phénomènes généralement observés [14]. Sur la figure 3*a* nous avons porté log ρ en fonction de la pression (jusqu'à 30 000 atmosphères) et pour des températures de 349 °K (courbe I) et 296 °K (courbe II).

La courbe I, jusqu'à 15 000 kg/cm², est une droite. Au delà la courbe croît un peu plus vite, le phénomène étant dû à la diminution de mobilité des électrons.

La courbe II a une forme plus complexe. A température et pression ordinaires, on est au début du domaine de conductibilité intrinsèque du germanium. A cette même température (296 °K), en augmentant fortement la pression, la largeur E_g de la bande interdite croît et l'énergie thermique des électrons devient de moins en moins suffisante pour passer dans la bande de conduction. Au delà de 10 000 kg/cm² on s'approche donc du domaine de conductivité extrinsèque. Dans ce domaine en supposant que les mobilités ne varient pas avec la pression, la conductivité, qui n'est plus due qu'aux impuretés ionisées, ne devrait pas changer avec la pression. Le passage du domaine intrinsèque au domaine extrinsèque serait alors représenté par la courbe théorique III (*fig.* 3*a*). En fait, il se présente un écart important aux très hautes pressions, entre les courbes théoriques (III) et expérimentales (II).

La figure 3*b* représente l'influence de la pression sur la mobilité des électrons déterminée au cours d'études expérimentales faites sur des échantillons de germanium type *n*, nettement dans le domaine de conductivité extrinsèque. Vers les fortes pressions, la mobilité des électrons décroît avec la pression. Des travaux analogues [17] effectués sur des échantillons type p ont montré que, jusqu'à 30 000 kg/cm², la mobilité des trous croît avec la pression, d'environ 1 % par 10 000 kg/cm².

Si, dans le calcul de la courbe théorique III (*fig.* 3*a*), on tient compte de la diminution de la mobilité des électrons, on obtient une courbe IV qui, aux hautes pressions, ne s'écarte que légèrement de la courbe expérimentale II. On attribue cet écart à une augmentation un peu moins rapide de E_g aux plus hautes pressions. La courbe représentée figure 3*c* montre ainsi que le coefficient de pression est constant jusqu'à 1 500 kg/cm² ($(\partial E_g/\partial P)_T = 5{,}4 . 10^{-6}$ eV.cm²/kg), puis qu'il diminue légèrement. Le germanium semble le seul semiconducteur cubique pour lequel une variation de $(\partial E_g/\partial P)_T$ ait été mise en évidence. Cela tient peut être au fait que peu de semiconducteurs ont été étudiés à d'aussi hautes pressions.

Les mesures de résistivité des couches minces de germanium, préparées par évaporation sous vide [23], donnent dans le domaine de pression entre 1 et 2 000 kg/cm² un coefficient de pression de $8 . 10^{-6}$ eV cm²/kg ; cette valeur est assez proche de celle trouvée à partir d'échantillons monocristallins.

Les coefficients de pression ont été déterminés aussi pour les quatre niveaux d'impuretés (un niveau de donneurs et trois niveaux d'accepteurs) dans le germanium doppé d'or [24] en mesurant la résistivité en fonction de la pression à différentes températures entre 45 °K et 195 °K. Le changement de la position du niveau est relativement plus grand lorsqu'il est mesuré par rapport à la bande de conduction que lorsqu'il est mesuré par rapport à la bande de valence.

— Les semiconducteurs binaires InAs, InSb et GaSb ont été étudiés [22], [25 à 28] à des pressions ne dépassant pas 12 000 kg/cm². On retrouve, de même que pour le germanium, une variation presque linéaire de E_g avec P. Dans certains cas, il n'a pas été mis en évidence de variation de mobilité ; celles constatées dans les autres cas sont relativement faibles.

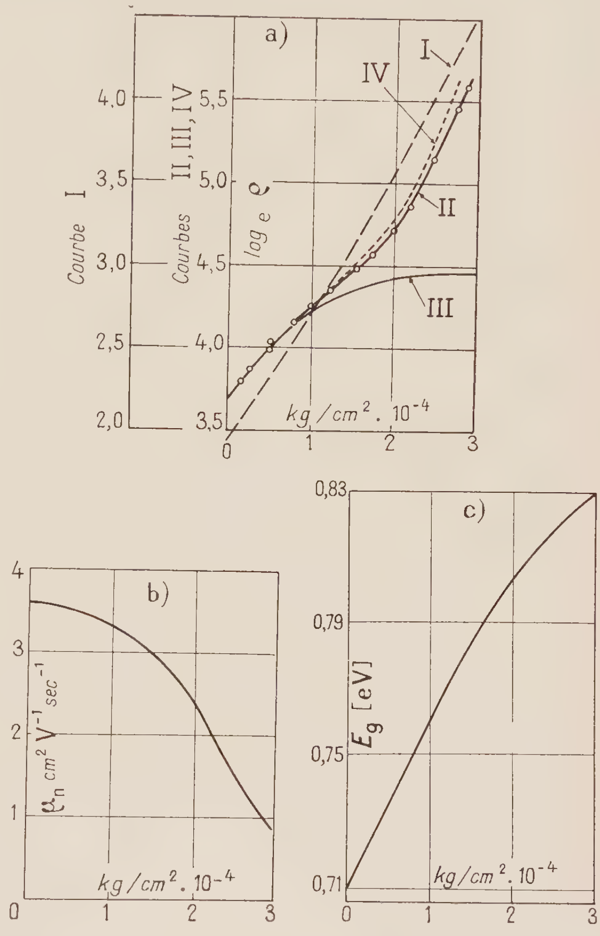


FIG. 3. — *a*) Logarithme de la résistivité du germanium type *n* en fonction de la pression.
b) Mobilité des électrons dans le germanium type *n* en fonction de la pression.
c) Augmentation de E_g avec la pression. (D'après Paul et Brooks [14].)

(*) Bridgman, au cours de ces premières expériences sur Ge avait constaté à température ordinaire, qu'aux échantillons de type *p* correspondaient des $(\partial E_g/\partial P)_T$ négatifs, ce qui était l'inverse des résultats trouvés avec les échantillons de type *n*. Des expériences analogues effectuées à température plus élevée (150 °C) n'ont pas confirmé cette distinction, les types *n* et *p* présentant alors des variations de même signe. Cela peut être dû au fait, que à température ordinaire, la conductibilité des échantillons était encore extrinsèque.

Le silicium, ayant la même structure que les corps étudiés précédemment, devrait présenter des variations de E_g et de ρ avec la pression qui soient de même signe que dans le cas du germanium. D'après Miller et Taylor [19] il était prévu pour Si un coefficient $(\partial E_g/\partial P)_T$ de 3.10^{-5} eV cm²/kg, mais les expériences montrent le contraire : on obtient des valeurs $(\partial E_g/\partial P)_T < 0$.

La figure 4 représente la variation de $\log_e \rho$ avec P pour différentes températures [29]. Les courbes en trait plein correspondent aux pressions croissantes et les pointillés aux pressions décroissantes.

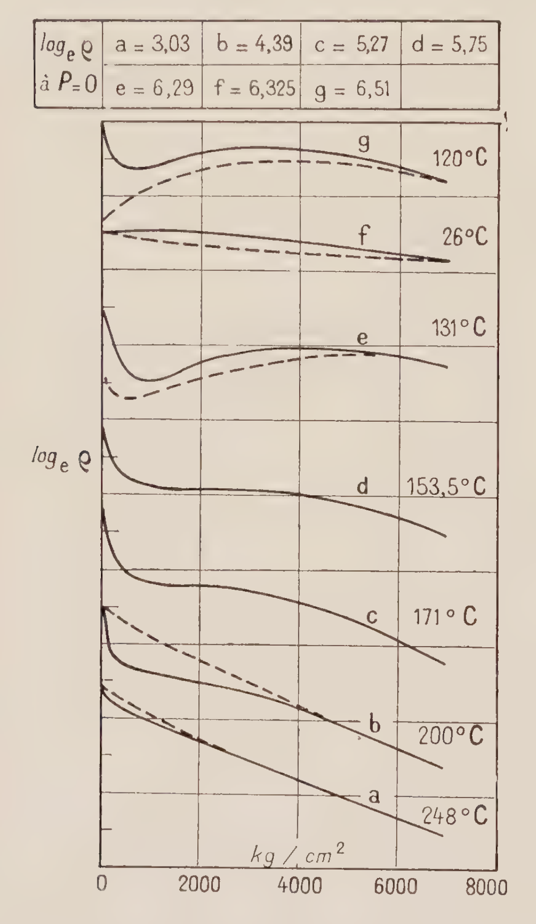


Fig. 4. — Logarithme de la résistivité du silicium type n en fonction de la pression pour différentes températures. (D'après Paul et Pearson [29].)

Pour Si la largeur de la bande interdite E_g est relativement grande (1,19 eV) aussi on n'atteint le domaine de conductibilité intrinsèque qu'à des températures assez élevées. On n'obtient ainsi une variation de $\log_e \rho$ vraiment linéaire avec celle de P que vers 250 °C. L'auteur ne pense pas observer de variations de la mobilité avec la pression. A l'inverse de ce qui a été constaté pour le germanium, du fait que, ici $(\partial E_g/\partial P)_T$ est négatif (— 1,5 10^{-6} eV.cm²/kg), une augmentation de P à température constante facilite les transitions des électrons et la conductibilité se déplace du domaine extrinsèque vers le domaine intrinsèque. Le domaine intrinsèque est ainsi atteint à des températures d'autant plus basses que la pression est plus élevée.

Les récents travaux de Smith [30] montrent que la résistivité du silicium (type n et type p) décroît entre 1 et 30 000 kg/cm², linéairement avec la pression. Les mesures ont été effectuées à 23 °C, c'est-à-dire dans le domaine de la conductivité extrinsèque. L'effet est dans les deux cas du même ordre de grandeur que pour le germanium type p.

Le coefficient de pression du silicium a également été déterminé [31] en mesurant le déplacement avec la pression des deux niveaux d'impuretés dans le silicium doppé d'or. Le niveau d'accepteurs E_1, qui se trouve à 0,54 eV au-dessous du minimum de la bande de conduction, se déplace vers le bas trois fois plus vite que le niveau de donneurs E_2 (à 0,35 eV au-dessus du maximum de la bande de valence) se déplace vers le haut. Si on néglige le faible changement de mobilité [14], on peut dire que les mesures de la résistivité donnent le changement des énergies d'activation et en même temps celui de la largeur de la bande interdite avec la pression. La somme des changements de E_1 et E_2 avec la pression donne pour $(\partial E_g/\partial P)_T$ entre 1 et 25 kg/cm², une valeur de -2.10^{-6} eV.cm²/kg.

B) *Cristaux du système hexagonal.* — Le tellure cristallise dans le système hexagonal et ses propriétés sont différentes selon la direction dans le cristal. Ainsi la largeur de la bande interdite est plus faible dans le sens de l'axe c que perpendiculairement à celui-ci ($E_g(//) = 0{,}32$ eV et $E_g(\perp) = 0{,}36$ eV) ; la conductibilité diffère pour ces deux directions et est plus forte dans la direction de l'axe c. Les mesures de ρ en fonction de la pression, effectuées sur des échantillons taillés dans des monocristaux selon différentes directions montrent que la résistivité décroît toujours lorsque la pression croît [22].[32 à 35]. La variation de $\log_e \rho$ avec P est à peu près linéaire jusqu'à 8 000 kg/cm² ; à des pressions plus élevées $\log_e \rho$ décroît moins vite. Le faible écart avec la linéarité, de $\log_e \rho$ en fonction de P, trouvé par Long [22] à des pressions allant jusqu'à 2 000 kg/cm² semble dû principalement à une augmentation avec P de la mobilité des trous dans les échantillons p étudiés. Jusqu'à 2 000 kg/cm² Long trouve une valeur moyenne de $(\partial E_g/\partial P)_T$ de l'ordre de -16.10^{-6} eV.cm²/kg pour des échantillons taillés parallèlement à l'axe c du cristal. A des pressions beaucoup plus élevées (jusqu'à 30 000 kg/cm²) il ressort

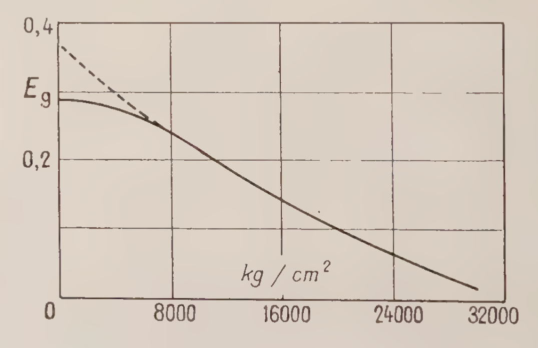


Fig. 5. — Diminution de la largeur de la bande interdite du tellure avec la pression. (D'après Bardeen [35]).

des travaux de Bridgman et Bardeen que la diminution de $(\partial (\log_e \rho)/\partial P)_T$ doit être influencée fortement par une diminution moins rapide de la largeur de la bande interdite E_g aux hautes pressions, c'est-à-dire que $(\partial E_g/\partial P)_T$ diminue.

La figure 5 représente la diminution de E_g avec la pression provenant des travaux de Bridgman et Bardeen sur des échantillons taillés perpendiculairement à l'axe c. Aux basses pressions, la température n'était pas suffisante pour que la conductibilité soit intrinsèque ; ceci explique l'anomalie de la courbe au-dessous de 7 000 kg/cm² et l'extrapolation (en pointillé) de la région de la courbe correspondant au domaine intrinsèque.

Bridgman a d'autre part constaté que vers 45 000 Kg/cm² le tellure change de phase et que cette modification doit être une forme métallique.

Jusqu'à 2 000 kg/cm² la résistivité des couches minces de tellure cristallisé [23], préparées par évaporation sous vide, diminue avec la pression, le coefficient $(\partial E_g/\partial P)_T$ étant de -11.10^{-6} eV.cm²/kg.

B) **Effet de la pression sur la résistance de la jonction p-n.** — 1° Principe. — La limite entre deux régions d'un semiconducteur dont l'une est de type p et l'autre de type n porte le nom de jonction p-n. La figure 6 schématise la distribution des électrons et des trous et les potentiels correspondants relatifs à une jonction p-n : a) sans application de tension ; b) avec application d'une tension directe ; c) avec application d'une tension inverse. Si on n'applique pas de tension à la jonction p-n, des trous se déplacent par diffusion de la région p vers la région n en laissant du côté p des ions d'accepteurs négativement chargés. Les électrons également diffusent vers la jonction et la région n se charge positivement. Il se crée alors une « couche double » à laquelle correspond un changement de potentiel représenté figure 6a. Les trous et les électrons diffusés se recombinent (courant dit de diffusion ou de recombinaison I_r). D'autre part, du fait de l'équilibre thermique il se produit de nouvelles transitions d'électrons dans la bande de conductivité et sous l'effet du potentiel les trous qui en résultent diffusent de la région n dans la région p, tandis que les électrons formés dans la région p diffusent dans la région n (ce phénomène constitue le courant dit de « génération » ou de conduction I_c). I_c est égal à I_r mais de sens opposé.

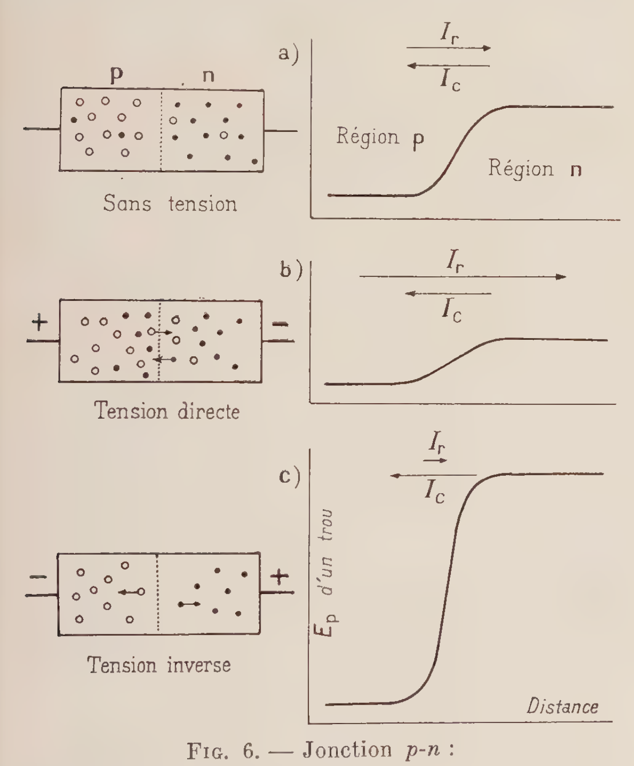


Fig. 6. — Jonction p-n :

a) sans tension appliquée ;
b) sous tension directe ;
c) sous tension inverse.

En appliquant une tension directe (*fig.* 6b) la « couche double » diminue ce qui se traduit par une augmentation du courant de recombinaison I_r.

Si maintenant on inverse la tension (*fig.* 6c) la partie p devient plus fortement négative et la partie n plus positive. Le potentiel entre les deux parties croît et le courant de recombinaison I_r diminue.

Le courant de génération I_c dépend de la concentration p_n des trous dans la région n et de la concentration n_p des électrons dans la région p ainsi que de leur vitesse de diffusion qui est respectivement D_p/L_p et D_n/L_n (D_n : constante de diffusion des électrons dans la région p ; L_n : longueur de diffusion des électrons dans le milieu p et réciproquement pour D_p et L_p).

$$I_c = e[n_n(D_n/L_n) + p_n(D_p/L_p)]. \quad (5)$$

Dans le cas où il n'y a pas de tension appliquée :

$$I_c = I_r.$$

Si on applique une tension V (directe ou opposée) le courant I_r est représenté par :

$$I_r = I_c . e^{eV/kT}.$$

Le courant total est :

$$I = I_r - I_c = I_c(e^{eV/kT} - 1). \quad (6)$$

Pour un semiconducteur pas trop près du domaine intrinsèque p_p et n_n (concentration des trous dans le domaine p et des électrons dans le domaine n) sont constants et grands par rapport à p_n et n_p : ces concentrations p_n et n_p sont proportionnelles à $e^{-E_g/kT}$. Si on porte cette expression dans l'équation 5 on voit que I_c est proportionnelle à $e^{-E_g/kT}$.

Alors :

$$R_c = A\, e^{E_g/kT} \quad \text{ou} \quad A = C^{te} \quad (7)$$

R_c est la résistance limite correspondant au cas où $I \to I_c$.

Une variation de E_g avec la pression se traduirait donc par une variation de même signe de la résistance limite R_c.

2° Résultats expérimentaux jusqu'a 700 kg/cm² [36]. — Les mesures ont été faites sur une jonction p-n de germanium préparée par bombardement d'un échantillon de type n par des particules α, la

surface étant convertie en type p sur une épaisseur de $1{,}9.10^{-3}$ cm.

La résistance de la jonction p-n a été mesurée en fonction de la pression en faisant passer une intensité de courant fixe de 30 microampères, à température ordinaire. La figure 7*a* montre la variation de R_d

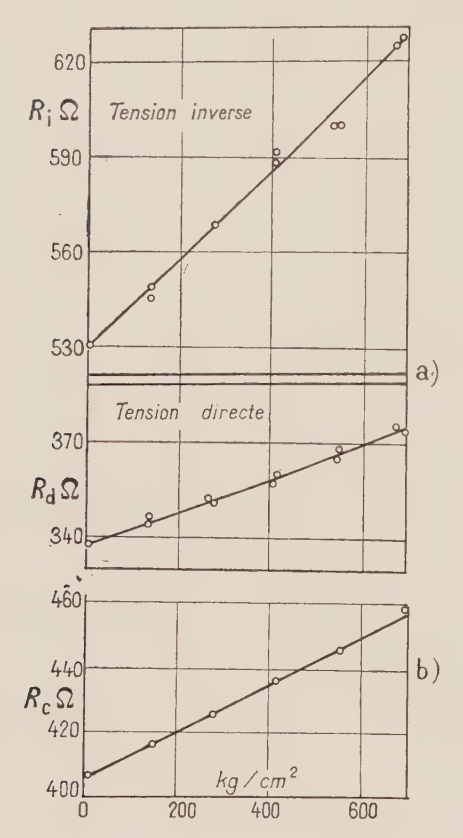


Fig. 7. — Variation de la résistance avec la pression.
a) sous tension inverse ou directe ;
b) résistance limite.

(résistance avec une tension appliquée *directe*) et R_i (avec tension *inverse*) en fonction de la pression. Dans les deux cas la résistance croît presque linéairement avec la pression, la variation étant relativement plus importante dans le sens inverse.

A partir des valeurs trouvées pour R_d et R_i on trouve par extrapolation (de $I = 30\ \mu A \rightarrow I_c$) et par des approximations, les variations de R_c en fonction de la pression (*fig.* 7*b*).

A partir des données de la figure 7*b* et de l'équation (7) on obtient :

$$\frac{R_c^p}{R_c^1} = \frac{e^{E_g^p/kT}}{e^{E_g^1/kT}}$$

où R_c^p et E_g^p sont les valeurs à une pression P et R_c^1 et E_g^1 celles à 1 kg/cm².

Ceci permet de déterminer la variation de E_g en fonction de la pression : entre 0 et 700 kg/cm² :

$$\log_e (R_c^{700}/R_c^1) = (E_g^{700} - E_g^1)/kT.$$

La température étant constante :

$$(\partial E_g/\partial P)_T = \log_e (R_c^{700}/R_c^1)\ kT/700$$

$$(\partial E_g/\partial P)_T = 4{,}5\ 10^{-6}\ \text{eV.cm}^2/\text{kg}.$$

C) **Effet de la pression sur le bord d'absorption.** — De nombreux travaux sur les spectres d'absorption des semiconducteurs ont montré que l'absorption optique tombe rapidement vers l'infrarouge. Les énergies des photons, au seuil d'absorption (énergie maximum du bord d'absorption) correspondent étroitement aux largeurs E_g des bandes interdites trouvées par d'autres méthodes. On détermine la valeur de E_g en extrapolant le bord de la courbe d'absorption à l'absorption zéro. Si on soumet le cristal à une pression hydrostatique variable et qu'on étudie son spectre, on trouve que la courbe d'absorption se déplace selon les cas vers les grandes ou les courtes longueurs d'ondes. Le déplacement de la valeur extrapolée du bord d'absorption donne une mesure directe du changement de E_g avec P.

a) Cristaux du système cubique. — Pour le germanium, le bord d'absorption, sous l'influence d'une pression croissante P, se déplace vers les courtes longueurs d'onde (voir *fig.* 8) c'est-à-dire que la largeur de la bande interdite croît avec P. Spitzer [37, 38] donne pour $(\partial E_g/\partial P)_T$, entre 1 et 1 000 kg/cm², la valeur 8.10^{-6} eV.cm²/kg.

Warschauer [39] opérant jusqu'à 8 000 atmosphères trouve à partir des courbes d'isoabsorption (coefficient d'absorption α entre 10 et 70 cm⁻¹), une variation de la largeur de la bande interdite avec la pression de $8{,}7\ 10^{-6}$ eV.cm²/kg, ce qui est en bon accord avec les résultats de Spitzer. L'extrapolation à $\alpha = 0$ donne pour le déplacement du seuil d'absorption une valeur égale à $5{,}4.10^{-6}$ eV.cm²/kg.

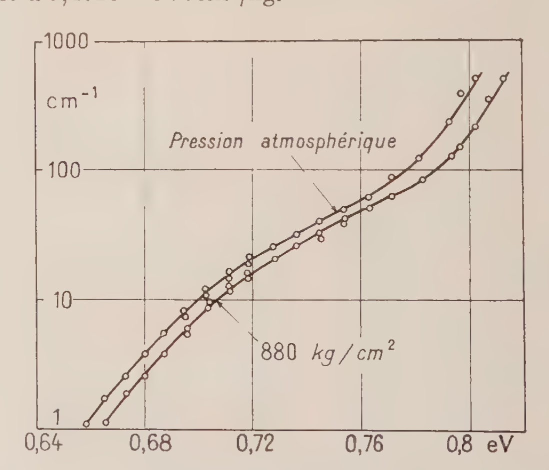


Fig. 8. — Coefficient d'absorption du germanium en fonction de l'énergie des photons pour deux pressions différentes. (D'après Fan, Shepherd et Spitzer [38].)

Récemment, Paul et Warschauer ont repris l'étude du déplacement du bord d'absorption avec la pression [40] sur des monocristaux de germanium de type n. La figure 8 représente le coefficient d'absorption α en fonction de l'énergie des photons pour diffé-

rentes pressions. On peut remarquer un léger changement de la forme du bord d'absorption avec la pression. L'extrapolation de l'inclinaison des courbes de l'isoaborption à $\alpha = 0$ donne pour le coefficient $(\partial E_g/\partial P)_T$ une valeur d'environ 4.10^{-6} eV.cm²/kg.

Pour les cristaux cubiques, type diamant, deux études théoriques sur la forme des bandes de valence et de conduction autour de la position d'équilibre dans le cristal ont été effectuées antérieurement : ce sont celle de Kimball [41] pour le diamant et celle de Mullaney [42] pour le silicium. Les deux calculs montrent que, par suite du fort recouvrement des bandes s et p il doit exister une bande de valence ayant la place seulement pour 4 électrons et une bande de conduction qui doit être vide. Ceci explique pourquoi le diamant et le silicium ne sont pas des conducteurs. Le calcul de Mullaney prend en considération les états $3s$, $3p$ et $3d$. Ces résultats théoriques aboutissent à une largeur de la bande de valence qui est en bon accord avec celle obtenue à partir du spectre d'émission des rayons X, mais la valeur trouvée pour la largeur de la zone interdite est beaucoup trop grande. La

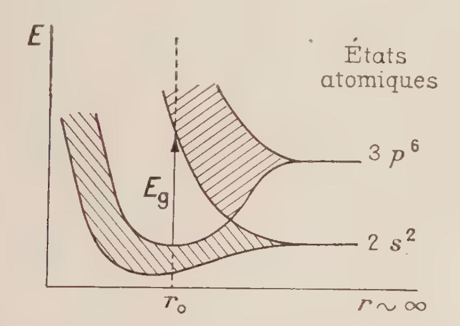


Fig. 9. — Forme des bandes dans un cristal cubique (type diamant) autour de la position d'équilibre.

figure 9 schématise ces résultats. D'après les formes théoriques obtenues pour les bandes, si on applique une forte pression, la distance d'équilibre entre les atomes dans le cristal diminue et cela devrait se traduire par une augmentation de la largeur de la bande interdite

Nous ne possédons pas de données expérimentales sur la variation de la largeur de la bande interdite E_g avec la pression dans le cas du diamant mais les résultats expérimentaux donnés précédemment pour le germanium, qui cristallise dans le même système, confirment bien le sens du phénomène prévu théoriquement : E_g croît quand la pression augmente.

Dans le cas du silicium, seuls les résultats expérimentaux obtenus par Spitzer confirment les déplacements que l'on peut théoriquement prévoir à partir des calculs de Mullaney, les autres résultats donnant un $(\partial E_g/\partial P)_T$ négatif et non pas un accroissement de E_g avec la pression.

L'étude récente de la structure des bandes d'énergie du germanium [43] montre que l'augmentation de la largeur de la bande interdite est due à l'augmentation de la séparation entre le minimum de la bande de conduction dans la direction (111) et le maximum de la bande de valence à $\boldsymbol{k} = 0$.

La séparation minimum entre la bande de valence et la bande de conduction est, à 294 °C, de 0,65 eV (début des transitions indirectes) ; la séparation à $\boldsymbol{k} = 0$ $(E_{c,0} - E_v)$ est, pour la même température, de 0,80 eV (début des transitions directes). Le minimum de la bande de conduction est, dans la direction (100) séparé également de la bande de valence de 0,80 eV (voir *fig.* 10).

Sous l'effet de la pression, les minima à $\boldsymbol{k} = 0$ et dans la direction (111) se déplacent assez rapidement vers le haut, tandis que le minimum dans la direction (100) ne change presque pas [44].

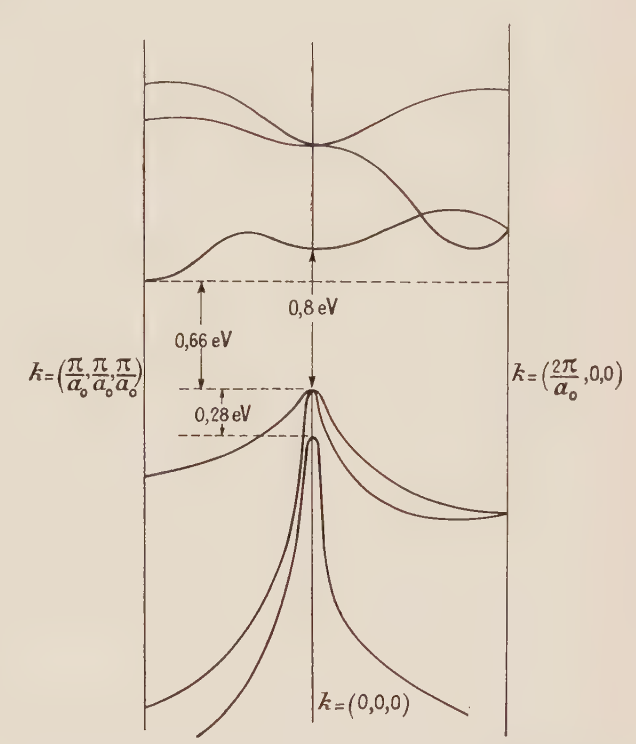


Fig. 10. — Schéma réduit des bandes d'énergie dans le germanium. (D'après Herman [43].)

La valeur de 4.10^{-6} eV.cm²/kg correspond donc à $[\partial(E_c - E_v)/\partial P]_T$. A partir des travaux de Fan [38] et de Neuringer [45] on trouve $[\partial(E_{c,0} - E_v)/\partial P]_T$ égal à 12.10^{-6} eV.cm²/kg, d'où il résulte que $(E_{c,0} - E_v)$ est de l'ordre de 8.10^{-6} eV.cm²/kg.

— Pour le silicium Spitzer [37] trouve que le bord d'absorption se déplace vers les courtes longueurs d'onde et donne : $(\partial E_g/\partial P)_T = 5.10^{-6}$ eV.cm²/kg. Contrairement aux résultats de Spitzer, Warschauer [39] signale un déplacement du bord d'absorption vers les grandes longueurs d'onde et donne la valeur -2.10^{-6} eV.cm²/kg. De récents travaux de Paul et Warschauer [46] confirment les résultats préliminaires. Le déplacement du bord d'absorption, déterminé à partir des courbes d'isotransmission, qui sont parfaitement parallèles entre elles entre 1 et 7 000 kg/cm², est de $-1{,}3\ 10^{-6}$ eV.cm²/kg. Cette valeur est en bon accord avec les résultats de Paul et Pearson [29], de Neuringer [45] (dont les mesures de déplacement du bord d'absorption, effectuées jusqu'à 1 000 atmosphères sur des monocristaux, donnent un

coefficient de pression égal à — 1,7.10⁻⁶ eV.cm²/kg) et de Nathan et Paul [31].

La structure des bandes du silicium, discutée en détail par Brooks [47] est représentée sur la figure 11.

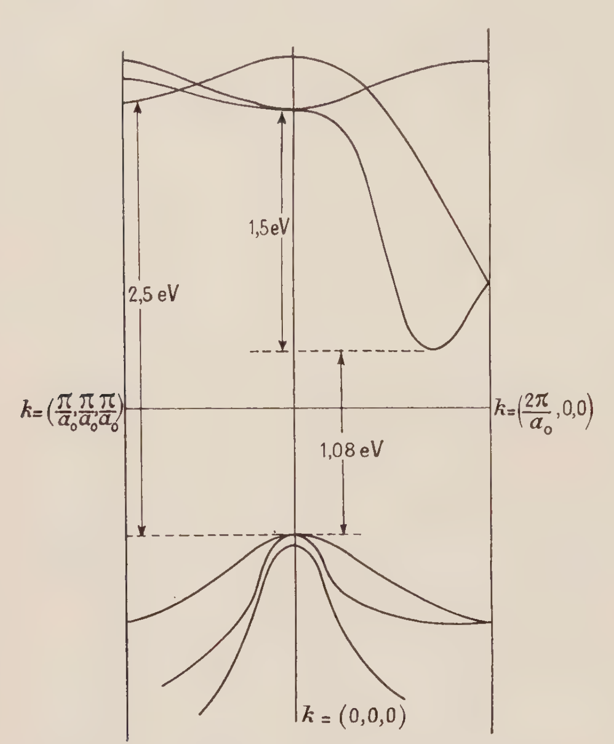


Fig. 11. — Schéma réduit des bandes d'énergie pour le silicium. (D'après Brooks [47].)

Le bord d'absorption correspond aux transitions indirectes entre le maximum de la bande de valence à $\boldsymbol{k} = 0$ et le minimum de la bande de conduction E_c dans la direction (100). Cette séparation est de 1,08 eV. La séparation entre la bande de valence et la bande de conduction à $\boldsymbol{k} = 0$ (début des transitions directes) est de 2,58 eV. La valeur de $-1{,}3.10^{-6}$ eV.cm²/kg doit être attribuée au coefficient $[(\partial E_c - E_v)/\partial P]_T$, car les transitions directes commencent seulement à des énergies beaucoup plus élevées.

— Paul et Warschauer [48] ont étudié également le déplacement du bord d'absorption avec la pression d'un certain nombre d'alliages germanium-silicium. Le domaine de pression s'étend de 1 à 7 000 kg/cm² : Le coefficient $(\partial E_g/\partial P)_T$ varie continuellement avec la composition, du germanium pur au silicium pur. La courbe présente une cassure entre 10 et 20 % de silicium. Il ressort des travaux de Johnson et Christian [49] et de Levitas [50], sur le changement de la largeur de la bande interdite E_g avec la composition des alliages germanium-silicium, que E_g croît assez vite jusqu'à environ 15 % de silicium puis que la croissance devient plus faible. Des travaux plus récents [51], [52] montrent que la courbe de E_g en fonction de la composition n'est linéaire dans aucune de ces deux régions.

Herman [53] interprète ces résultats de la manière suivante : le minimum de la bande de conduction dans la direction (111), dans le cas du germanium, se déplace vers le haut lorsqu'on ajoute du silicium. A environ 15 % de silicium les deux minima, pour les directions (111) et (100), sont à la même énergie et, pour les concentrations plus grandes, le minimum (100) est celui de plus faible énergie et se déplace lentement vers le haut lorsqu'on ajoute encore plus de silicium.

Sous l'effet de la pression, la largeur de la bande interdite augmente jusqu'à 18 % de silicium ; pour les concentrations en silicium plus élevées la largeur de la bande semble diminuer. L'application de la pression et l'addition du silicium provoquent un mouvement vers le haut du minimum (111). Au-dessus de 18 % de silicium, l'addition de silicium cause apparemment une faible montée du minimum (100) tandis que la pression tend à diminuer E_g. La position du bord d'absorption en fonction de la composition est, pour différentes pressions, donnée par la somme des transitions indirectes vers les minima (100) et (111), dont la probabilité change avec la composition. Au-dessous de 15 % de silicium la forme du bord d'absorption est donnée surtout par les transitions vers le minimum (111), tandis qu'au-dessus de 20 % ce sont les transitions vers (100) qui déterminent sa position et sa forme.

— L'étude de la position du bord de l'absorption fondamentale en fonction de la pression, pour les composés intermétalliques InAs et GaSb, montre [54] que entre 1 et 2 000 kg/cm², celui-ci se déplace vers les courtes longueurs d'onde. Les coefficients de pression $(\partial E_g/\partial P)_T$ sont respectivement pour InAs et GaSb : 8,2.10⁻⁶ eV.cm²/kg et 15,2.10⁻⁶ eV.cm²/kg.

— Pour le sulfure de cadmium, Hohler [55] observe un déplacement du bord d'absorption vers les courtes longueurs d'onde et donne pour ce déplacement une valeur de 0,02 Å/atm., ce qui représente, exprimé en coefficient de pression $(\partial E_g/\partial P)_T \sim 9.10^{-6}$ eV.cm²/kg.

b) Cristaux du système hexagonal. — Avec le tellure, pour lequel les propriétés dépendent de la direction dans le cristal, l'étude de l'absorption sous pression a été faite en lumière polarisée pour les deux directions principales du cristal [56]. Le bord de l'absorption se déplace dans les deux cas vers les grandes longueurs d'onde et le coefficient $(\partial E_g/\partial P)_T$ est égal à 18.10⁻⁶ eV.cm²/kg, pour la direction parallèle à l'axe c du cristal. Il semble que pour les faibles pressions $E_{g\perp}$ décroisse avec la pression plus rapidement que $E_g//$ [45], ce qui est en accord avec les résultats de Reitz [57].

— Des mesures de déplacement du bord d'absorption ont également été effectuées entre 1 et 1 700 kg/cm² sur des monocristaux de sulfure de zinc (modification hexagonale) [58] ; elles montrent que la largeur de la bande interdite augmente avec la pression, le coefficient $(\partial E_g/\partial P)_T$ étant égal à 9.10⁻⁶ eV.cm²/kg.

— D'après Gutsche [59] le déplacement de la limite d'absorption vers les courtes longueurs d'onde est, pour la modification *hexagonale* du sulfure de cadmium, de — 9,3 10⁻³ Å.cm²/kg, ce qui donne un coefficient de pression $(\partial E_g/\partial P)_T$ égal à 4,4.10⁻⁶ eV.cm²/kg. Le coefficient de pression est ainsi de même signe que celui trouvé par Hohler [55] pour la modification *cubique* du sulfure de cadmium mais de valeur absolue deux fois plus faible.

III. Comparaison des résultats.

Les principales valeurs de $(\partial E_g/\partial P)_T$ trouvées pour le germanium, le silicium et le tellure ont été groupées dans le tableau I.

Pour le germanium, les mesures effectuées par méthode optique [39] sur le seuil d'absorption ($5,4\ 10^{-6}$ eV.cm²/kg) sont en parfait accord avec celles trouvées par mesure de résistivité, ce qui était prévisible. Les mesures optiques effectuées sur le bord d'absorption pour des valeurs de coefficients d'absorption plus élevées donnent 8 et $8,7.10^{-6}$ eV.cm²/kg, ce qui s'écarte passablement de la valeur $5,4.10^{-6}$ eV.cm²/kg. Cela doit être dû au fait que, en augmentant la pression, le bord d'absorption ne se déplace pas tout à fait parallèlement à lui même.

Pour le silicium les résultats sont toujours beaucoup moins précis que pour le germanium et on peut considérer que la valeur -2.10^{-6} eV.cm²/kg, trouvée par Warschauer [39] d'après ses mesures jusqu'à 8 000 kg/cm², est en bon accord avec celle [29] résultant des mesures de variation de résistivité ($-1,5\ 10^{-6}$ eV.cm²/kg). La valeur $+5\ 10^{-6}$ eV.cm²/kg, trouvée par Spitzer jusqu'à 1 000 kg/cm², est de signe opposé et est en contraction avec les résultats des travaux faits soit par méthode optique, soit par méthode électrique.

Pour le tellure l'accord entre les mesures optiques et électriques relatives à des travaux sur des échantillons massifs taillés parallèlement à l'axe est également bon.

Les valeurs trouvées à partir de couches minces [23] présentent une certaine différence avec celle trouvée par les autres auteurs. Ces différences ne sont cependant pas énormes si on envisage tous les facteurs qui sont susceptibles d'influencer plus ou moins les résultats aussi bien dans un sens que dans l'autre. C'est ainsi que par exemple les fortes pressions peuvent modifier les surfaces de contact entre les microcristaux et provoquer des tensions par suite des différences de compressibilité du support et de la couche. L'adsorption du gaz neutre compresseur devrait également influencer la résistivité mais, à pression élevée, cela ne semblerait pas de voir modifier l'inclinaison de la courbe log ρ en fonction de P.

Conclusion. — Les résultats des mesures de variation de la résistivité des semiconducteurs et du déplacement de leur bord d'absorption fondamentale en fonction de la pression peuvent être, dans certains cas, interprétés à l'aide des diagrammes des bandes d'énergie et fournissent des données nouvelles pour contrôler et compléter ces diagrammes, établis à partir d'autres données expérimentales et de calculs théoriques.

Cet exposé a été limité aux semiconducteurs pour lesquels nous avons trouvé des résultats expérimentaux quantitatifs sur la variation de la résistivité et le déplacement du bord d'absorption avec la pression. Nous n'avons par exemple pas parlé des variations de résistivité des poudres (oxydes métalliques) sous pression à cause du peu de données numériques qui existent.

Nous tenons à faire remarquer que, si peu de valeurs numériques ont été référées directement à Bridgman, ce sont néanmoins ses appareillages et partiellement ses propres études qui sont à la base des premiers résultats aux très hautes pressions que nous avons exposés. Depuis quelques années, les possibilités d'obtenir des monocristaux semiconducteurs plus purs permettent à ses nombreux continuateurs d'obtenir des résultats plus exacts ou plus précis.

Manuscrit reçu le 6 octobre 1959.

TABLEAU I

SEMICONDUCTEUR ÉTUDIÉ	$(\partial E_g/\partial P)_T.10^{-6}$ en eV.cm²/kg OBTENU PAR MESURES DE RÉSISTIVITÉ D'ÉCHANTILLONS MASSIFS	DE JONCTION p-n	DE COUCHES MINCES	OPTIQUES SUR LE BORD D'ABSORPTION
—	—	—	—	—
Ge	5,4 [14]	4,5 [36]	8 [23]	8 [37], [38], [40] 8,7 [39] 5,4 [39]
Si	— 1,5 [29] — 2 [31]			— 1,3 [46] + 5 [37] — 2 [39] — 1,7 [45]
Te	— 16 (//) [22]		— 11 [23]	— 18 (//) [56]

BIBLIOGRAPHIE

[1] Aigrain (P.) et Englert (F.), Les semiconducteurs, Paris, 1958.
[2] Darmois (G.), Le corps solide, Paris, 1955.
[3] Hunter (L.), Handb. Semiconductor Electronics, New York, 1956.
[4] Kittel (C.), Introduction to Solid State Physics, New York, 1956.
[5] Goudet (G.) et Meuleau (C.), Semiconducteurs, Paris, 1958.
[6] Shockley (W.), Electrons and Holes in Semiconductors, New York, 1950.
[7] Wright (D.), Semiconductors, London, 1950.
[8] Dunlap (W.), An Introduction to Semiconductors, New York, 1957.
[9] Bridgman (P. W.), The Physics of High Pressure, London, 1949.
[10] Henisch (H.), Semiconducting Materials (Reading Conference), London, 1951.
[11] Breckenridge (R.), Photoconductivity Conference, New York, 1956.
[12] Seitz (F.) et Turnbull (D.), Solid State Physics (I), New York, 1955.
[13] Emschwiller (G.), Chimie physique III, Paris, 1951.
[14] Paul (W.) et Brooks (H.), *Phys. Rev.*, 1954, **94**, 1128.
[15] Benedek (G.), Paul (W.) et Brooks (H.), *Phys. Rev.*, 1955, **98**, 1193 et **100**, 1129.
[16] Brooks (H.) et Paul (W.), *Bull. Amer. Phys. Soc.*, 1956, **1**, 48.
[17] Smith (A. C.), *Bull. Amer. Phys. Soc.*, 1958, **3**, 14.
[18] Nathan (M. I.), Paul (W.) et Brooks (H.), *Bull. Amer. Phys. Soc.*, 1958, **3**, 14.
[19] Miller (P.) et Taylor (J.), *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 179.
[20] Bridgman (P. W.), *Proc. Amer. Acad. Arts. Sc.*, 1951, **79**, 125.
[21] Bridgman (P. W.), *Proc. Amer. Acad. Arts. Sc.*, 1953, **82**, 71.
[22] Long (D.), *Phys. Rev.*, 1956, **101**, 1256.
[23] Robin (J.), *J. Physique Rad.*, 1959, **20**, 506.
[24] Holland (M. G.) et Paul (W.), *Bull. Amer. Phys. Soc.*, 1959, **4**, 145.
[25] Keyes (R.), *Phys. Rev.*, 1955, **99**, 490.
[26] Long (D.), *Phys. Rev.*, 1955, **99**, 388.
[27] Long (D.) et Miller (P.), *Phys. Rev.*, 1955, **98**, 1192.
[28] Taylor (J.), *Phys. Rev.*, 1955, **100**, 1593.
[29] Paul (W.) et Pearson (G.), *Phys. Rev.*, 1955, **98**, 1755.
[30] Smith (A. C.), Techn. Prt. No PH-2, Gordon MacKay Lab. of Appl. Sci. Harvard Univ., Cambridge, Mass., juin 1958.
[31] Nathan (M. I.) et Paul (W.), *Bull. Amer. Phys. Soc.*, 1957, **2**, 134.
[32] Bridgman (P. W.), *Proc. Amer. Acad. Arts Sc.*, 1932-1933, **68**, 95.
[33] Bridgman (P. W.), *Proc. Amer. Acad. Arts Sc.*, 1936-1937, **72**, 157.
[34] Bridgman (P. W.), *Proc. Amer. Acad. Arts Sc.*, 1938, **72**, 159 et 1940, **74**, 21.
[35] Bardeen (J.), *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 1777.
[36] Hall (H.), Bardeen (J.) et Pearson (G.), *Phys. Rev.*, 1951, **84**, 129.
[37] Spitzer (W.), Bennett (C. O.) et Fan (H. Y.), *Phys. Rev.*, 1955, **98**, 228 et *Bull. Amer. Phys. Soc.*, 1954, **29**, 13.
[38] Fan (H. Y.), Shepherd (M. L.) et Spitzer (W.), Photoconductivity Conference, New York, 1956.
[39] Warschauer (D.), Paul (W.) et Brooks (H.), *Phys. Rev.*, 1955, **98**, 1193.
[40] Paul (W.) et Warschauer (D. M.), *J. Phys. Chem. Solids*, 1958, **5**, 89.
[41] Kimball (G.), *J. Chem. Phys.*, 1935, **3**, 560.
[42] Mullaney (J.), *Phys. Rev.*, 1944, **66**, 326.
[43] Herman (F.), *Proc. Inst. Radio Engrs*, 1955, **43**, 1703.
[44] Nathan (M. I.), Techn. Rpt. No. PH-1, Gordon McKay Lab. of Appl. Sci., Harvard Univ., Cambridge, Mass., février 1958.
[45] Neuringer (L.), *Bull. Amer. Phys. Soc.*, 1957, **2**, 134.
[46] Paul (W.) et Warschauer (D. M.), *J. Phys. Chem.* Solids, 1958, **5**, 102.
[47] Brooks (H.), *Advances in Electronics and Electron Physics*, New York, 1955, **7**.
[48] Paul (W.) et Warschauer (D. M.), *J. Phys. Chem.* Solids, 1958, **6**, 6.
[49] Johnson (E. R.) et Christian (S. M.), *Phys. Rev.*, 1954, **95**, 560.
[50] Levitas (A.), Wang (C. C.) et Alexander (B. H.), *Phys. Rev.*, 1954, **95**, 846.
[51] Braunstein (R.), *Bull. Amer. Phys. Soc.*, 1956, **1**, 126.
[52] Braunstein (R.), Moore (A. R.) et Herman (F.), *Phys. Rev.* (à paraître).
[53] Herman (F.), *Phys. Rev.*, 1954, **95**, 847.
[54] Taylor (H. J.), *Bull. Amer. Phys. Soc.*, 1958, **3**, 121.
[55] Hohler (G.), *Ann. Physik*, 1949, **4**, 371.
[56] Neuringer (L.), *Phys. Rev.*, 1955, **98**, 1193.
[57] Reitz (J. R.), *Phys. Rev.*, 1957, **105**, 1233.
[58] Piper (W. W.), Marple (D. T. F.) et Johnson (P. D.), *Phys. Rev.*, 1958, **110**, 323.
[59] Gutsche (E.), *Naturwiss.*, 1958, **45**, 486.

LETTRES A LA RÉDACTION

LA TEMPÉRATURE DE CURIE D'UN RÉSEAU D'ISING IMPARFAIT

Par J. Seiden,
Laboratoire de Radioélectricité,
Faculté des Sciences de Paris.

Dans un travail précédent [1] que nous désignerons ici par (I), nous avons développé une méthode mathématique rigoureuse pour calculer la fonction de partition $Q(N, T)$ d'un réseau (carré ou cubique simple) d'Ising imparfait. Nous avons montré que, au voisinage de la température de Curie T_c du réseau imparfait, on avait

$$Q(N, T) = \int_{-\infty}^{0} e^{m^2(E)/2k^2T^2}\, \Psi(E)\, e^{-E/kT(1+2cKJ^{-1})}\, dE. \quad (1)$$

Cette formule est rigoureuse au premier ordre en c inclus, c étant la concentration atomique des imperfections. Les notations sont les mêmes que dans (I).

Dans le cas du réseau carré imparfait, la formule (1) ramène le problème très complexe de la détermination de $Q(N, T)$ à de simples quadratures. En effet, la fonction de partition $Q_P(J, N, T)$ du réseau carré parfait a été calculée par Onsager et puisque

$$Q_P(J, N, T) = \int \Psi(E)\, e^{-E/kT}\, dE \quad (\text{I}, 40)$$

$\Psi(E)$ est la transformée de Laplace inverse de $Q_P(J, N, T)$. De même, la fonction $m^2(E)$, définie par (I, 33), peut être obtenue par une transformation de Laplace à partir des fonctions $< s_i\, s_j(T) >$, calculées par Kaufman et Onsager, en utilisant la relation (I, 58). Les calculs sont très longs, mais (1) résout complètement, au moins en principe, le problème de la détermination des propriétés thermodynamiques du réseau carré imparfait au voisinage du point de Curie.

Dans le cas du réseau cubique simple imparfait, $\Psi(E)$ et $m^2(E)$ ne sont pas connus, nous ne pourrons donc effectuer la quadrature (1) comme pour le réseau carré imparfait. C'est pourquoi, dans (I), nous avons employé le théorème de la moyenne et écrit

$$Q(N, T) = e^{m^2[\overline{\overline{E}}(T)]/2k^2T^2}\, Q_P(J, N, T(1 + 2cK/J)). \quad (\text{I}, 88)$$

La valeur moyenne $\overline{\overline{E}}(T)$, comme nous l'avons montré dans (I), est une fonction « lentement » variable de T. Néanmoins, les dérivées de $\overline{\overline{E}}(T)$ peuvent présenter des singularités, et il en résulte que (I, 88) ne doit pas être utilisé pour une détermination rigoureuse de la température de Curie T_c du réseau imparfait, comme nous l'avons fait dans (I). La température de Curie $T_c = T_{cP}(1 - 2cK/J)$ obtenue dans (I) ne peut donc qu'être approximative.

Puisque $\Psi(E)$ n'est pas connu, il semble impossible, à l'aide (1), de déterminer exactement la température de Curie T_c du réseau cubique imparfait en fonction de la température de Curie T_{cP} du réseau cubique parfait, mais on peut obtenir une valeur assez satisfaisante de $\Delta T_c = T_c - T_{cP}$ par le calcul suivant.

La méthode utilisée dans (I) pour obtenir T_c consiste en fait à poser $m^2(E)$ = Constante. Mais nous avons montré dans (I) que

$$\left.\begin{aligned} m^2(-3NJ) &= 0 \\ m^2(0) &= 6cNK^2. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Nous avons longuement étudié la fonction $m^2(E)$ dans (I), et il résulte de cette étude qu'en première approximation, on aura

$$m^2(E) = 6cNK^2 + 2c\frac{K^2}{J}E \quad (3)$$

qui vérifie les égalités (2). Portons (3) dans (1), il vient

$$Q(N, T) = e^{3cNK^2/k^2T^2} \int_{-3NJ}^{0} \Psi(E)\, e^{-E\lambda(T)}\, dE \quad (4)$$

avec

$$\lambda(T) = \left(1/kT\left(1 + 2c\frac{K}{J}\right)\right) - (cK^2/k^2\,T^2\,J). \quad (5)$$

On voit alors aisément que la température de Curie T_c est donnée par

$$\lambda(T_c) = 1/kT_{cP}. \quad (6)$$

La solution convenable de l'équation (6) peut être développée en série de puissances de c et il vient

$$T_c = T_{cP}[1 - (2cK/J) - (cK^2/JkT_{cP})]. \quad (7)$$

On voit sur (4) que la transition de phase du réseau imparfait est du même type que celle subie par le réseau parfait.

Pour un réseau cubique simple, on a approximativement $kT_{cP} = 5J$ et puisque $0 < K \leqslant J$, le terme cK^2/JkT_{cP} dans la parenthèse (7) est au moins dix fois inférieur au terme $2cK/J$. La valeur approximative de T_c obtenue dans (I) diffère donc très peu de la valeur plus correcte donnée par (7). On peut admettre que (7) donne ΔT_c avec une erreur relative inférieure à 5 %.

Dans (I) nous avons distingué deux catégories d'imperfections de spin :

1) Les sites vacants, etc... La densité électronique, en ce cas, subit probablement des modifications au voisinage seulement de l'imperfection. Ce voisinage peut d'ailleurs être assez étendu. L'hamiltonien (I, 2) qui est à la base de notre théorie ne tient compte, il

est vrai, que des modifications de densité électronique concernant les plus proches voisins de chaque site imparfait, mais il est aisé d'étendre la théorie pour tenir compte de modifications affectant des voisins plus éloignés de chaque site imparfait.

2) La présence, dans des positions de substitution, d'impuretés constituées d'atomes d'éléments possédant des configurations électroniques non saturées. L'introduction de telles imperfections provoque, comme nous l'avons montré dans (I), une modification de la densité électronique non plus seulement au voisinage des sites imparfaits, mais dans tout le cristal.

Lettre reçue le 8 décembre 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Seiden (J.), *J. Physique Rad.*, 1959, **20**, 876.

SPECTROPHOTOMÈTRE ENREGISTREUR AUTOMATIQUE

Par G. Monod-Herzen,
Laboratoire de Luminescence de la Faculté des Sciences Rennes.

L'établissement point par point des courbes spectrales est une besogne qu'il est utile de rendre automatique en couplant un enregistreur avec un moteur assurant le défilement du spectre.

Le Laboratoire de Luminescence de la Faculté des Sciences de Rennes utilise, pour l'étude des larges bandes de luminescence, un monochromateur Desvignes dont la bonne luminosité et le faible pouvoir de résolution conviennent à ces recherches. L'emploi d'un photomultiplicateur AVP 50 et d'un picoampèremètre augmente encore la possibilité de déceler des émissions peu puissantes. C'est ce montage que nous avons transformé en spectrophotomètre enregistreur. Pour cela, les courants fournis par le picoampèremètre sont reçus par un polygraphe Chauvin-Arnoux synchronisé avec un dispositif commandant le monochromateur.

A ma demande, M. Giquelais, chef de l'atelier de notre Département a étudié pour cela et mis au point un groupe moteur à double sens de marche qui nous donne toute satisfaction. Il comprend un moteur synchrone double Sapmi qui entraîne un train d'engrenages dont la dernière pièce est un pignon en duralumin de 80 mm de longueur, calé sur l'axe du palmer qui assure le déplacement du prisme du monochromateur.

La vitesse de rotation de cet axe a été choisie, en fonction des travaux envisagés, de deux tours par minute (il faudrait la réduire pour l'étude des spectres de raies) ; elle permet l'exploration complète du spectre en 40 minutes. Des méplats aux extrémités de ce pignon actionnent en fin de course, des deux côtés, des interrupteurs de sécurité coupant en même temps le

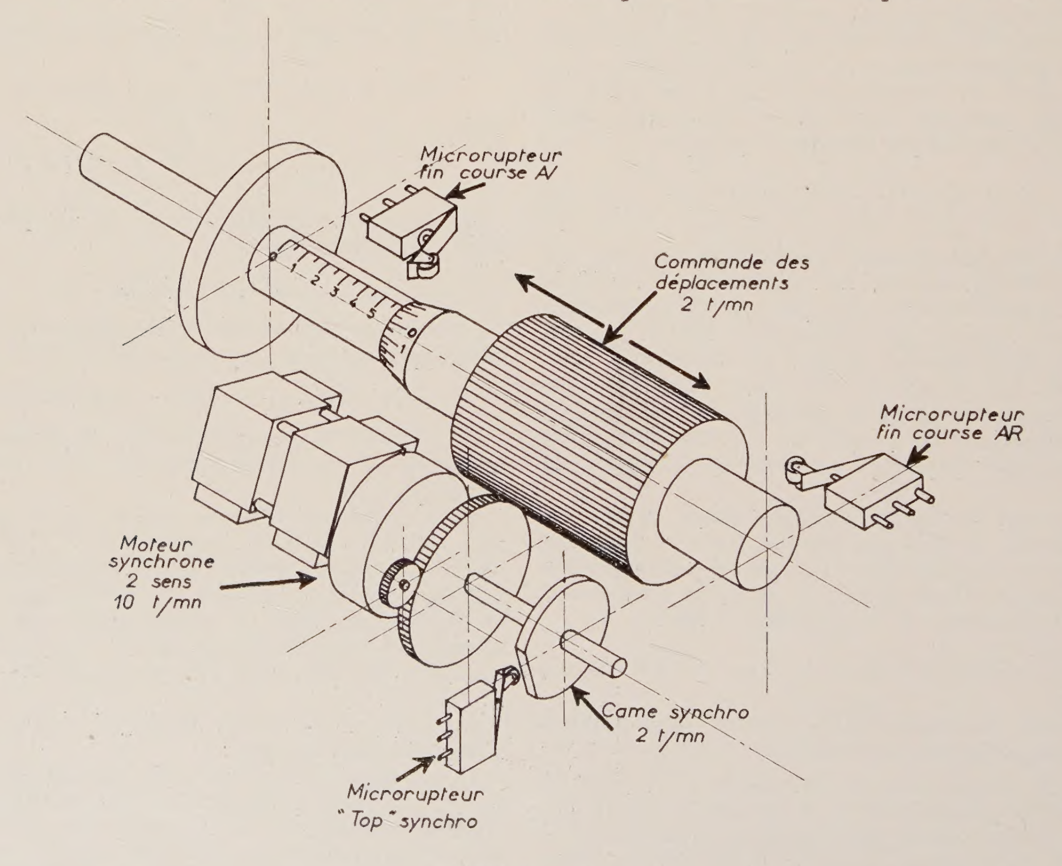


Fig. 1.

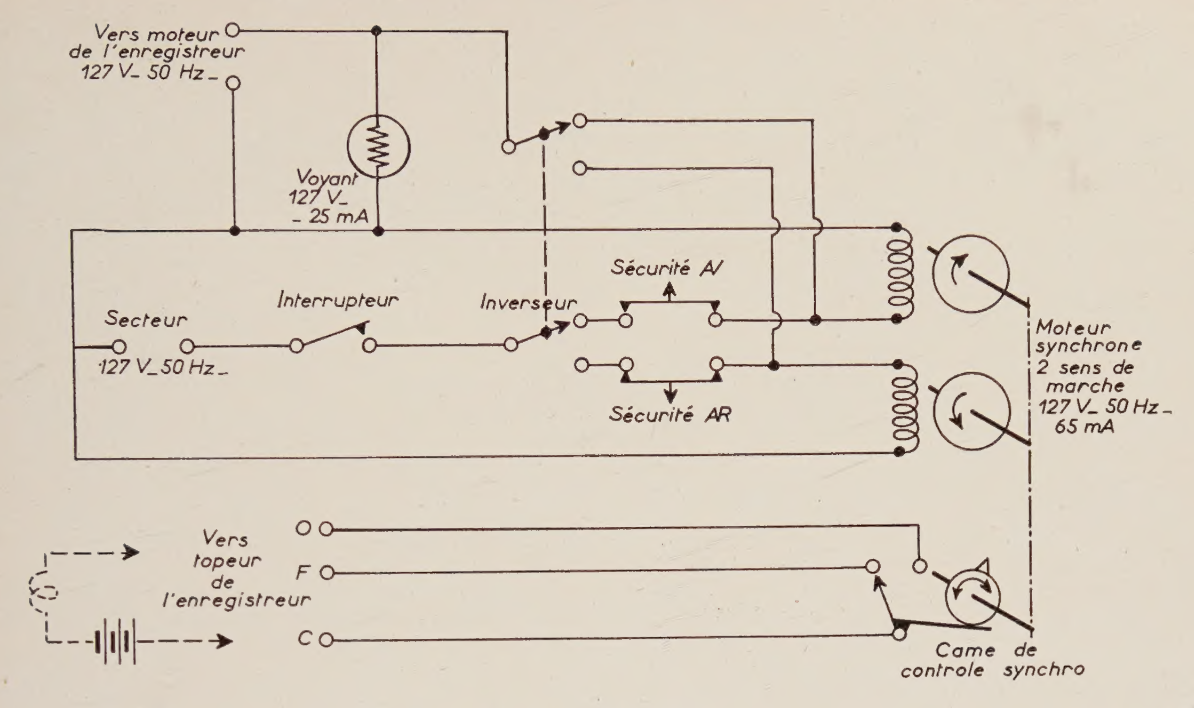


FIG. 2.

courant du moteur du monochromateur et celui du moteur du polygraphe. Une came, agissant sur un troisième rupteur, permet de repérer sur le graphique, par l'électroplume du polygraphe, le passage de chaque millimètre entier de la course du palmer. Un inverseur et un interrupteur général à commandes extérieures rendent possible la mise en marche de l'appareil dans l'un ou l'autre sens, à partir d'un point quelconque de la course du palmer.

Lettre reçue le 10 décembre 1959.

INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE SUR LA STRUCTURE DES BANDES DE DIFFUSION DU CARBONYLE CÉTONIQUE ET DE CELLES DU CYCLE BENZÉNIQUE

Par C. MANGIN,
Laboratoire de Physique Moléculaire, Poitiers.

Lors du découplage des molécules couplées, la fréquence de liaison du dipôle responsable de l'association doit augmenter. On peut provoquer ce découplage, soit par dilution du liquide, soit par agitation thermique, ce qui évite l'introduction d'un solvant perturbant le champ d'interaction.

Pour cette deuxième méthode, il suffit de placer le tube contenant la substance étudiée par spectrographie Raman dans une petite étuve munie de glaces pour le passage de la lumière.

Première étude. — *Influence de la température sur la fréquence de vibration du carbonyle, vers* 1 700 cm^{-1}. On sait que cette bande Raman peut être résoluble en plusieurs composantes [1].

Les intensités relatives des bandes sont entre parenthèses, et les fréquences en cm^{-1}.

a) ACÉTOPHÉNONE :

20°	1 682 (10)	1 686 (10)		
130°	1 682 (6)	1 688 (10)	1 695 (5)	
185°	1 681 (5)	1 687 (10)	1 695 (6)	
230°	1 681 (3)	1 686 (10)	1 694 (7)	

b) PROPIOPHÉNONE :

20°	1 681 (10)	1 687 (10)	1 693 (6)	
230°		1 686 (10)	1 695 (10)	1 705 (5)

c) CYCLOHEXANONE :

20°	1 706 (5)	1 710 (8)	1 715 (10)	
115°	1 707 (4)	1 712 (10)	1 717 (10)	1 723 (5)

d) BUTYRONE :

20°	1 709 (10)	1 713 (10)	
115°		1 713 (10)	1 720 (8)

On constate dans tous les cas, qu'il apparaît, par augmentation de température, des composantes de plus hautes fréquences dont l'intensité relative croît avec la température. Ceci a pour effet de déplacer l'enveloppe de la bande vers les fréquences élevées.

Deuxième étude. — *Influence de la température sur la liaison Carbone-Carbone du cycle benzénique de cétones aromatiques.* La fréquence de la liaison >C=C< se situe vers 1 600 cm^{-1}.

ACÉTOPHÉNONE :

20°			1 600 (10)
130°		1 595 (7)	1 600 (10)
185°		1 595 (10)	1 600 (10)
230°	1 590 (3)	1 595 (7)	1 600 (10)

PROPIOPHÉNONE :

20°			1 598 (10)
230°	1 590 (6)	1 595 (8)	1 599 (10)

Il y a ici, dans ces exemples, en fonction de l'augmentation de température, un abaissement de fréquence de l'enveloppe de la bande par apparition de composantes plus basses avec des intensités relatives croissant avec la température. On a donc un effet opposé à ce que l'on observe pour le groupement >C = O.

Essai d'interprétation de ces deux effets de sens contraires. — Au cours du découplage des molécules associées, les électrons libres de la molécule qui avaient été repoussés par l'action du champ d'interaction viennent reprendre leurs places dans la liaison > C =O et la renforcent : la fréquence de la liaison carbonyle a donc tendance à monter. Par effet de conjugaison les liaisons C = C du cycle devenant plus lâches, leur fréquence de vibration s'abaisse.

Cette interprétation se confirme par l'étude de cétones telles que la BENZYLACÉTONE, pour laquelle aucune variation de fréquence de la bande de vibration de la liaison C = C ne s'observe, même à haute température. Cette fréquence reste à 1 605 cm^{-1}, alors que la bande du carbonyle a tendance à augmenter de fréquence.

Résumé. — Les quelques exemples rassemblés ici montrent qu'en élevant la température, la fréquence de diffusion de la vibration fondamentale de la liaison C = C du cycle *a tendance à diminuer*, ou du moins, apparaît-il des *composantes de plus basses fréquences.*

Cette variation de fréquence est de sens opposé à ce que l'on observe pour la vibration du groupement carbonyle. Pour celui-ci, ce sont *les composantes de plus hautes fréquences qui augmentent d'intensité avec la température.*

Pour les cétones aromatiques, on peut penser que ces deux effets sont liés l'un à l'autre et dûs à la migration d'électrons mobiles.

Lettre reçue le 22 décembre 1959.

RÉFÉRENCE

[1] GRAY (E.), Colloque sur l'Optique Moléculaire, Bordeaux, mai 1956.

Le Gérant : MAURICE BLONDIN. — Dépôt légal : 1er trim. 1960. — Imp. TAFFIN-LEFORT à Lille (France).